

# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

## INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 34

August/September

Heft 8/9

### Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik

Die Jahrestagung 1954 der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik fand in der Osterwoche vom 20.—24. 4. in München statt. München hatte seine alte Anziehungskraft bewährt. Der Besuch der Tagung war groß (etwa 270 Teilnehmer). Entsprechend groß war auch die Zahl der Vorträge. Es fanden 6 längere, zusammenfassende und rund 70 Kurzvorträge bzw. Vorführungen wissenschaftlicher Filme statt. Diese große Zahl machte es erforderlich, daß drei Vortragsreihen nebeneinander liefen, eine für angewandte Mathematik, eine für Mechanik und eine dritte für Strömungslehre.

Die Hauptversammlung der Gesellschaft fand am 23. 4. vormittags statt. Im vergangenen Jahre war eine auffallend große Zahl von Mitgliedern verstorben. Ihrer wurde bei Beginn der Sitzung gedacht. Dann berichtete der Vorsitzende Prof. Dr. Walther über das verflossene Jahr. Insbesondere sprach er über die Fachausschüsse, durch deren Arbeit die Haupttagung von Einzelberichten entlastet werden soll.

1. Den Fachausschuß für statistische Methoden, den bisher Herr Stange geleitet hatte, gab dieser wegen Arbeitsüberlastung ab. Ihn wird Herr Heinhold, München, übernehmen.
2. Den Fachausschuß für moderne Anwendungen der Funktionentheorie wird weiter Herr Ullrich, Gießen, betreuen.
3. Der Fachausschuß für Rheologie hat im vergangenen Jahr eine Tagung abgehalten, über die der Leiter, Herr Schultz-Grunow, Aachen, auf der Münchner Tagung zusammenfassend berichtete.
4. Der Fachausschuß für Rechenmaschinen unter der Leitung von Herrn Walther, Darmstadt, und der Fachausschuß für Rheologie werden ihre nächste Sondertagung zusammen mit den zuständigen Fachausschüssen anderer Organisationen im Frühjahr 1955 veranstalten.
5. Weiter besteht ein Fachausschuß für Regeltechnik unter Leitung von Herrn Oppelt, Frankfurt. Dieser gab ebenfalls auf der Münchner Tagung einen Überblick über Probleme und Methoden der mathematischen Behandlung von Regelvorgängen. Im Anschluß daran hielt der Ausschuß seine erste Sitzung ab.
6. Neugebildet wurde ein Ausschuß für Strömungsforschung, dessen Leitung Herr Riegels, Göttingen, übernahm.

Den Kassenbericht und den Bericht über die Mitgliederzahl, die im Berichtsjahr auf 582 zugenommen hat, gab der Geschäftsführer Prof. Dr. Görtler. Auf Antrag der Kassenprüfer wurde ihm Entlastung erteilt. Satzungsgemäß schieden aus dem Vorstandsrat die Herren Betz, Göttingen, und Willers, Dresden, aus. Neugewählt wurde für Herrn Betz der diesjährige örtliche Tagungsleiter Herr Heinhold. Der Unterzeichnete wurde wiedergewählt. Das Amt der Kassenprüfer übernahmen die Herren Quade, Hannover, und Cremer, Aachen. Der Jahresbeitrag wurde wieder auf 5.—DM festgesetzt. Die nächste Tagung wird in der Zeit vom 31. Mai bis 4. Juni 1955 (Pfingstwoche) in Berlin stattfinden. Anschließend an die Hauptversammlung wurde die Ausbildung und Stellenvermittlung der Diplom-Mathematiker besprochen. Es wurde beschlossen einen Ausschuß für die Angelegenheiten der Diplom-Mathematiker ins Leben zu rufen, mit dessen Leitung Herr Schultz-Grunow, Aachen, beauftragt wurde.

Wie auf allen bisherigen Tagungen war auch auf dieser für Geselligkeit und Gelegenheit zur Aussprache gesorgt. Am Dienstag fand ein zwangloser Begrüßungsabend im Regina-Palasthotel statt, am Mittwochabend ein Besuch des Deutschen Theaters. Donnerstag mittag hatte der Oberbürgermeister der Stadt München zu einem Empfang im Ratskeller geladen. Abends versammelte man sich im Augustiner-Keller, und am Sonnabend fand ein Ausflug in das Gebiet des Ammer- und Starnbergersees statt. Außerdem hatten die Damen der Teilnehmer Gelegenheit, an verschiedenen Besichtigungen und Ausflügen teilzunehmen.

Für die Organisation dieser ausgezeichnet verlaufenen Tagung darf ich im Namen aller Teilnehmer dem örtlichen Tagungsleiter Herrn Heinhold herzlichen Dank aussprechen.

Willers



# A. Angewandte Mathematik

## Der Konvergenzgrad bei iterativer Lösung von Gleichungen durch inverse Interpolation

Von K.-H. Bachmann in Dresden

Gegeben sei eine reelle Funktion  $f(x)$ , die in einem Intervall  $\mathfrak{J}$  genau eine einfache Nullstelle  $\tilde{x}$  besitze.  $f(x)$  sei in  $\mathfrak{J}$  stetig und genügend oft stetig differenzierbar. Um  $\tilde{x}$  zu bestimmen, geht man oft in der Weise vor, daß man  $f(x)$  durch eine Ersatzfunktion  $g(x)$  ersetzt, deren Nullstellen einfach zu bestimmen sind. Ein Iterationsverfahren zur Bestimmung von  $\tilde{x}$  erhält man dadurch, daß man von  $n+1$  Anfangsnäherungen  $x_i \in \mathfrak{J}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) ausgehend eine Funktion  $g_1(x)$  aus den Forderungen

$$g_1(x_i) = f(x_i) \quad \dots \dots \dots (1)$$

bestimmt. Es möge nun  $g_1(x)$  in  $\mathfrak{J}$  genau eine einfache Nullstelle  $x_{n+1}$  haben, die als nächste Näherung für  $\tilde{x}$  betrachtet wird. Allgemein bestimmt man  $g_v(x)$  aus

$$g_v(x_{i+v-1}) = f(x_{i+v-1}) \quad \dots \dots \dots (2)$$

und  $x_{n+v}$  als Nullstelle von  $g_v(x)$  in  $\mathfrak{J}$ , wieder vorausgesetzt, daß  $g_v$  in  $\mathfrak{J}$  nur eine einfache Nullstelle hat. Fordert man noch, daß  $g_v$  in  $\mathfrak{J}$  differenzierbar sei, erhält man durch Anwendung des Mittelwertsatzes für den Fehler von  $x_{n+v}$

$$\varepsilon_{n+v} = x_{n+v} - \tilde{x} = \frac{f(\tilde{x}) - g_v(\tilde{x})}{g'_v(\xi_{n+v})} (x_{n+v} \dots \xi_{n+v} \dots \tilde{x}) \quad \dots \dots \dots (3).$$

Der Nenner verschwindet nicht, da  $g_v$  in  $\mathfrak{J}$  nur eine einfache Nullstelle hat.

Im folgenden seien die  $g_v$  stets Polynome  $n$ -ten Grades. Dann ist die Bestimmung von  $g_v$  aus (2) eindeutig möglich und es ergibt sich der Fehler

$$|\varepsilon_{n+v}| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\eta_v)}{(n+1)! g'_v(\xi_{n+v})} \right| \prod_{i=0}^n |\varepsilon_{i+v-1}| \quad (\text{Min } x_{i+v-1} \leq \eta_v \leq \text{Max } x_{i+v-1}) \quad \dots (4).$$

Sind die Voraussetzungen

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)! g'_v(\xi)} \right| \leq Q \quad (\xi, \eta \in \mathfrak{J}) \quad \text{für alle } v \quad \dots \dots \dots (V1)$$

$$Q \varepsilon^n \leq 1 \quad \dots \dots \dots (V2)$$

erfüllt, wobei  $\varepsilon$  eine obere Schranke für die  $|\varepsilon_i|$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) ist, so konvergiert die Folge  $\{x_v\}$  gegen  $\tilde{x}$ . (V1) und (V2) sind erfüllbar, wenn  $\varepsilon$  genügend klein ist, da dann  $\mathfrak{J}$  so klein gewählt werden kann, daß für jedes mögliche Interpolationspolynom  $g'$  keine Nullstelle in  $\mathfrak{J}$  hat und außerdem dann jedes Interpolationspolynom in  $\mathfrak{J}$  genau eine einfache Nullstelle hat.

Um die Schnelligkeit der Konvergenz zu untersuchen, werde eine zur Folge  $\{|\varepsilon_v|\}$  majorenne Folge  $\{\delta_v\}$  betrachtet, definiert durch

$$\delta_{n+v} = Q \prod_{i=0}^n \delta_{i+v-1}, \quad \delta_i = \varepsilon \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (5)$$

durch wiederholtes Einsetzen erhält man aus (5)

$$\delta_{n+v} = Q^{\alpha_{n+v}} \varepsilon^{\beta_{n+v}} \quad \dots \dots \dots (6).$$

Die  $\alpha_v$  und  $\beta_v$  genügen den Rekursionsformeln

$$\alpha_{n+v} = 1 + \sum_{i=0}^n \alpha_{i+v-1}; \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (7),$$

$$\beta_{n+v} = \sum_{i=0}^n \beta_{i+v-1}; \quad \beta_i = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (8).$$

Maßgebend für die Schnelligkeit der Konvergenz ist das Wachstum der  $\beta_v$ . Definiert man nun den Konvergenzgrad  $g$  einer Folge  $\{z_v\} \rightarrow \tilde{z}$  als obere Grenze aller  $\gamma$ , für die

$$\sup \frac{|z_{v+1} - \tilde{z}|}{|z_v - \tilde{z}|^\gamma} < +\infty \quad \dots \dots \dots (9),$$

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. Bode wig, Z. angew. Math. Mech. 29, S. 44—51.



erhält man im vorliegenden Falle als Konvergenzgrad

$$g = \lambda_n = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} \dots \dots \dots (10).$$

Es folgt dies daraus, daß

$$\delta_{v+1} = \delta^{\beta_{v+1}/\beta_v} \cdot Q^{\alpha_{v+1} - \alpha_v \beta_{v+1}/\beta_v} \dots \dots \dots (11)$$

ist und die Folge der Exponenten von  $Q$  beschränkt bleibt.  $\lambda_n$  ist die absolut größte Wurzel der charakteristischen Gleichung der Differenzgleichung (8), falls diese Wurzel reell und einfach ist. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^{n+1} - \sum_{\mu=0}^n \lambda^\mu = 0 \dots \dots \dots (12).$$

Ihre absolut größte Wurzel ist positiv reell und einfach und genügt der Abschätzung

$$2 \frac{n+1}{n+2} < \lambda_n < 2 \dots \dots \dots (13).$$

Für  $n = 1$  ist das beschriebene Iterationsverfahren die bekannte regula falsi. Hierbei ergibt sich der Konvergenzgrad zu

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1) = 1,618.$$

Unter entsprechenden Voraussetzungen lassen sich diese Betrachtungen auf die Lösung von Gleichungen in allgemeineren Räumen ausdehnen.

## Quadratische Konvergenz der Bernoullischen Methode

Von F. L. Bauer in München

Das Bernoullische Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung von Polynomen einschließlich der auf Jacobi zurückgehenden Erweiterung für konjugiert-komplexe Paare ist nur linear konvergent. Es läuft bekanntlich auf die Iteration eines Vektors mit der zum Polynom gehörigen Frobeniuschen Matrix hinaus. Zunächst wird gezeigt, daß die Iteration mit der Transponierten (sie hängt mit der Lagrange'schen Variante des Verfahrens zusammen) den Vorteil einer einfachen Verprobungsmöglichkeit hat und programmierungstechnisch so günstig ist, daß sie sich sogar mit gewöhnlichen Lochkartenanlagen durchführen läßt. Insbesondere aber erlaubt sie eine spezielle Maßnahme, durch die ein quadratisch konvergentes Fortschreiten der Iteration erzielt wird. Dazu hat man jeweils  $n$  Schritte der gewöhnlichen Iteration (wenn  $n$  der Grad des Polynoms ist) durchzuführen und über die Zwischenergebnisse geeignet zu mitteln. Die Gewichtungsfaktoren der Mittelung ergeben sich (und zwar gilt das nur für die Iteration mit der Transponierten) nebenbei in unmittelbarer Weise.

Auch das solcherart abgekürzte Verfahren ist gegen Rundungsfehler selbstkorrigierend. Außerdem ist der Iterationsprozeß weiterhin programmierungstechnisch einfach und auch mit einer Verprobungsmöglichkeit versehen. Das Verfahren ist daher den Erfordernissen einer Durchführung mit programmgesteuerten Rechenanlagen angemessen. Da im wesentlichen nur die ersten drei Speziesoperationen vorkommen, ist es auch für Polynome mit komplexen Koeffizienten geeignet, der Rechenaufwand steigt nicht mehr als unerlässlich an.

Die Iteration führt nicht nur auf die absolut größte Nullstelle, sondern auch direkt auf das Polynom, von dem diese Nullstelle abgetrennt ist. Das Vorkommen mehrerer Nullstellen gleichen größten Betrags macht sich bekanntlich durch die Nicht-Konvergenz der Hauptiterationsreihe bemerkbar; man hat nun mit dieser Reihe einen Prozeß durchzuführen, der formal mit der „cross-division“ von Routh zusammenfällt, und zwar unter Umständen wiederholt, bis eine der so gebildeten Nebenreihen konvergiert. Dann wird nicht nur das (für reelle Polynome selbst reelle) Polynom dieser Nullstellen, sondern ebenfalls auch das Polynom der verbleibenden Nullstellen approximiert. Von besonderer Bedeutung ist hier natürlich der Regelfall eines einfachen konjugiert-komplexen Paares. Man wird also stets neben der Hauptiterationsreihe die erste Nebeniterationsreihe bilden und die Iteration abbrechen, sobald eine der beiden Reihen „steht“. Nur in Ausnahmefällen wird man weitere Nebenreihen bilden müssen.



## Über die erzwungenen Schwingungen in einem Kondensatorkreise, der eine Eisenkernspule enthält

Von G. Colombo in Padua

Es ist aus der Erfahrung bekannt, daß, wenn man in einem Kondensatorkreis, der eine Eisenkernspule enthält, eine periodische elektromotorische Kraft eingeschaltet, man subharmonische Schwingungen erhalten kann.

Diese subharmonischen Schwingungen lassen sich erklären wenn man die starke nicht-lineare Abhängigkeit des magnetischen Flusses des Eisenkernes von der Stromstärke  $i$ , die in der Spule kreist, in Betracht nimmt. Die elektrische Ladung  $x$  des Kondensator erfüllt die folgende nicht-lineare D. G.

$$\mathfrak{L}(\dot{x}) \ddot{x} + \mathfrak{R} \dot{x} + \frac{1}{\mathfrak{C}} x = E(t) \quad (1).$$

Wir machen folgende Voraussetzungen:

a) Die Funktionen  $\mathfrak{L}(\dot{x})$ ,  $E(t)$  seien stetig nebst ihren ersten Ableitungen; überdies sei  $\mathfrak{L}(\dot{x})$  eine gerade,  $E(t)$  eine ungerade Funktion;  $E(t)$  ist periodisch mit der Periode  $2T$ .

b)  $E$ ,  $\mathfrak{L}_1$ ,  $\mathfrak{L}_2$ ,  $\sigma$ ,  $\delta$ ,  $\kappa$ ,  $I_s$  seien positive Konstanten,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  gerade Funktionen von  $\dot{x}$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  Funktionen von  $t$ , welche der Gleichung  $\eta_2(t+T) = -\eta_1(t)$  genügen, ferner setzen wir

$$\mathfrak{L}(\dot{x}) = \begin{cases} \mathfrak{L}_1 + \kappa \varepsilon_1 & \text{für } |\dot{x}| \geq I_s + \sigma \\ \mathfrak{L}_2 + \kappa \varepsilon_2 & \text{für } |\dot{x}| \leq I_s - \sigma \end{cases}, \quad E(t) = \begin{cases} E + \kappa \eta_1, & \text{für } \delta \leq t \leq T - \delta \\ -E + \kappa \eta_2 & \text{für } T + \delta \leq t \leq 2T - \delta \end{cases} \quad (2).$$

$\kappa$ ,  $\sigma$ ,  $\delta$  seien genügend klein, während  $E$ ,  $\mathfrak{L}_1$ ,  $\mathfrak{L}_2$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{R}$ ,  $I_s$ , günstigen qualitativen Bedingungen genügen sollen.

c)  $\mathfrak{L}(\dot{x})$  sei monoton für  $I_s + \sigma \leq |\dot{x}| \leq I_s + \sigma$ ,  $E(t)$  sei monoton für  $0 \leq t \leq \delta$ ,  $T - \delta \leq t \leq T + \delta$ , usw. Unter diesen Voraussetzungen beweise ich, daß eine periodische Lösung von kleinster Periode  $6T$  existiert und daß diese stabil ist in dem Sinne, daß die Lösungen der D. G. <sup>1)</sup>, wenn ihre Anfangsbedingungen genügend nahe den Anfangsbedingungen der periodischen Lösung sind, sich nicht von der periodischen Lösung mehr als eine bestimmte Größe entfernen.

## Symmetrisierbare Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen

Von H.-K. Dettmar

Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen

Die *symmetrisierbaren* Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen sind eine Verallgemeinerung der *selbstadjungierten* Aufgaben. Die Selbstadjungiertheit (vgl. [1], [2]), wird durch die weniger einschränkende Voraussetzung der Symmetrisierbarkeit ersetzt.

Zugrunde liegt die Eigenwertaufgabe, die aus der Differentialgleichung

$$M[y] = \lambda N[y] \quad (1)$$

und den Randbedingungen

$$U_\mu[y] = 0 \quad (\mu = 1, \dots, m) \quad (2)$$

besteht. Dabei ist

$$M[y] = \sum_{k=0}^m f_k(x) y^{(k)}(x), \quad N[y] = \sum_{k=0}^n g_k(x) y^{(k)}(x)$$

und

$$U_\mu[y] = \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{\mu k} y^{(k)}(a) + \beta_{\mu k} y^{(k)}(b)].$$

Die  $f_k$  und  $g_k$  sind in  $a \leq x \leq b$  gegebene, reelle stetige Funktionen mit  $f_m \neq 0$  und  $g_n \neq 0$ . Es ist  $0 \leq n < m$ . Die  $\alpha_{\mu k}$  und  $\beta_{\mu k}$  sind reelle Koeffizienten. Die Gleichungen (2) werden linear unabhängig vorausgesetzt.

<sup>1)</sup> Die Arbeit wird in Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol. XXIII. veröffentlicht.



## 1. Zusammenstellung der verwendeten Begriffe

Mit  $\mathfrak{B}$  wird der reelle lineare Funktionenraum, dessen Elemente in  $a \leq x \leq b$   $m$ -mal stetig differenzierbar sind und die Randbedingungen (2) erfüllen, bezeichnet. Eine Funktion  $u \in \mathfrak{B}$  heißt *Vergleichsfunktion*.

Ferner werden lineare homogene Differential-Integral-Ausdrücke  $\Phi[y]$  betrachtet, die von der Form

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^{\pi_0} p_{k0}(x) y^{(k)}(x) & \quad (0 \leq \pi_0 \leq m), \\ \int_{c_1}^x dx_1 \sum_{k=0}^{\pi_1} p_{k1}(x, x_1) y^{(k)}(x_1) & \quad (0 \leq \pi_1 \leq m-1), \\ \int_{c_2}^x dx_2 \int_{c_3}^{x_2} dx_1 \sum_{k=0}^{\pi_2} p_{k2}(x, x_1, x_2) y^{(k)}(x_1) & \quad (0 \leq \pi_2 \leq m-1) \\ & \dots \dots \dots \text{usw.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

sind. Dabei sind die Funktionen  $p_{k0}, p_{k1}, \dots$  in  $a \leq x \leq b$  in allen Argumenten reelle stetige Funktionen mit  $p_{\pi_0 0} \neq 0$ . Für die  $c_e$  gilt  $a \leq c_e \leq b$ . Die höchste in  $\Phi[y]$  auftretende Ableitungsordnung  $\pi$  nennen wir die Ordnung des Ausdrucks  $\Phi[y]$ .

Unter Verzicht auf größte Allgemeinheit werden die *symmetrisierbaren* Eigenwertaufgaben wie folgt definiert (zum Begriff der Symmetrisierbarkeit vgl. auch [3], [4], [5]): Die Eigenwertaufgabe (1), (2) heißt *symmetrisierbar*, wenn ein linearer homogener Differential-Integral-Ausdruck  $\Phi[y]$  existiert, der ein Ausdruck der Gestalt (3) oder auch eine Summe von endlich vielen derartigen Ausdrücken ist, und wenn mit zwei beliebigen Vergleichsfunktionen  $u, v$  für die Formen

$$\{u, v\} = \int_a^b \Phi[u] M[v] dx \quad \text{und} \quad \langle u, v \rangle = \int_a^b \Phi[u] N[v] dx$$

die *Symmetriebeziehungen*

$$\{u, v\} = \{v, u\} \quad \text{und} \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

bestehen. Den Operator  $\Phi$ , der den Ausdruck  $\Phi[y]$  erzeugt, nennen wir dann einen *Vergleichsoperator* der Eigenwertaufgabe. Sind überdies die beiden Formen *positiv definit* in  $\mathfrak{B}$  ( $\{u, u\} > 0$  und  $\langle u, u \rangle > 0$  für  $u \neq 0 \in \mathfrak{B}$ ), so heißt die Eigenwertaufgabe *volldefinit symmetrisierbar* und  $\Phi$  ein *volldefiniter Vergleichsoperator*.

Jede selbstadjungierte Eigenwertaufgabe ist symmetrisierbar ( $\Phi \equiv 1$ ). Darüber hinaus gibt es symmetrisierbare Aufgaben, die nicht selbstadjungiert sind (s. Beispiel 2).

Für viele Betrachtungen ist es vorteilhaft, neben  $\mathfrak{B}$  den umfassenderen Funktionenraum  $\mathfrak{B}_N \supseteq \mathfrak{B}$  heranzuziehen, dessen Elemente im Grundintervall  $\bar{n}$ -mal [ $\bar{n} = \text{Max}(\pi, n)$ ] stetig differenzierbar sind und so viele der Randbedingungen (2) erfüllen, daß  $\langle u, v \rangle$  in  $\mathfrak{B}_N$  symmetrisch und positiv definit ist. (In  $\mathfrak{B}_N$  hat  $\langle u, v \rangle$  alle Eigenschaften eines *skalaren* Produktes und kann zur Festlegung einer Metrik dienen.)

## 2. Sätze über die volldefiniten symmetrisierbaren Eigenwertaufgaben

Die Eigenwertaufgabe wird im folgenden durchweg *volldefinit symmetrisierbar* vorausgesetzt mit  $\Phi$  als *volldefinitem* Vergleichsoperator. Es gelten u. a. folgende *S ä t z e*: Die Eigenwertaufgabe besitzt abzählbar unendlich viele Eigenwerte ohne Häufungspunkt im Endlichen. Alle Eigenwerte sind positiv und lassen sich in einer Folge  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  anordnen (jeder Eigenwert ist entsprechend seiner Vielfachheit gezählt). Zu dieser Folge gibt es einen Satz von zugehörigen Eigenfunktionen  $y_1, y_2, \dots$ . Die Eigenfunktionen können orthonormiert angenommen werden, d. h.  $\langle y_i, y_k \rangle = \delta_{ik}$ . Ist  $R[u] = \{u, u\} / \langle u, u \rangle$  der „mit  $\Phi$  gebildete *R a y l e i g h* sche Quotient“, so gilt

$$\lambda_k = \text{Min}_u R[u] \dots \dots \dots (4),$$

wo  $u$  alle Funktionen  $\neq 0$  aus  $\mathfrak{B}$  durchläuft, die den Gleichungen  $\langle u, y_\varrho \rangle = 0$  ( $\varrho = 1, \dots, k-1$ ) genügen.  $y_k$  ist Lösung dieser Variationsaufgabe.

Für die *Green'sche Resolvente*  $G(x, \xi, \lambda)$  der Eigenwertaufgabe gilt die *Symmetriebeziehung*

$$\Phi_x [G(x, \xi, \lambda)] \equiv \Phi_\xi [G(\xi, x, \lambda)] \dots \dots \dots (5)$$

in den beiden Dreiecksbereichen  $a \leq x \leq \xi \leq b$  und  $a \leq \xi \leq x \leq b$  (das  $x$  bzw.  $\xi$  am Operator  $\Phi$  zeigt an, für welches Argument  $\Phi$  gebraucht wird).

Ferner gelten folgende Relationen: Für  $u \in \mathfrak{B}_N$  die Ungleichung

$$\langle u, u \rangle \geq \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, y_k \rangle^2 \quad (\text{Besselsche Ungleichung}) \dots \dots \dots (6),$$



und für  $u \in \mathfrak{B}_N$  und  $v \in \mathfrak{B}$  die Gleichung

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, y_k \rangle \langle v, y_k \rangle \dots \dots \dots (7).$$

Genügt der Vergleichsoperator gewissen zusätzlichen Bedingungen, so ist die iterierte Funktion

$$q(x) = \int_a^b G(x, \xi, 0) N_{\xi} [u(\xi)] d\xi$$

einer Vergleichsfunktion  $u(x)$  entwickelbar:

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x), \text{ wo } c_k = \langle q, y_k \rangle = \frac{1}{\lambda_k} \langle u, y_k \rangle.$$

Die Reihe konvergiert mitsamt den ersten  $m$  Ableitungen absolut und gleichmäßig in  $a \leq x \leq b$ . (Weitere Einzelheiten und Sätze finden sich in [6]).

### 3. Verfahren zur praktischen Lösung

Die bekannten Verfahren zur genäherten Lösung von Eigenwertaufgaben (Verfahren der schrittweisen Näherungen, Ritz'sches Verfahren und andere) sowie die bekannten Einschließungssätze (vgl. etwa [2]) lassen sich auf die symmetrisierbaren Eigenwertaufgaben anwenden und näher analysieren. Es sei dies andeutungsweise am Beispiel des *Verfahrens der schrittweisen Näherungen* gezeigt.

Die Vorschrift dieses Verfahrens lautet: Von einer Funktion  $q_0 \neq 0 \in \mathfrak{B}_N$  ausgehend werden Funktionen  $q_1, q_2, \dots \in \mathfrak{B}$  bestimmt als Lösungen der Randwertaufgaben

$$M[q_i] - tN[q_i] = N[q_{i-1}], \quad U_{\mu}[q_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \dots \dots (8).$$

Dabei ist  $t$  reell und  $\neq \lambda_k$  ( $t = \text{Iterationszentrum}$ ). Mit den  $q_i$  werden die Schwarzschen Konstanten  $a_r = \langle q_i, q_{r-i} \rangle$  und mit diesen die Schwarzschen Quotienten  $\mu_{r+1} = a_r/a_{r+1}$  gebildet. Die Schwarzschen Konstanten und damit auch die Quotienten hängen von dem gewählten Vergleichsoperator  $\Phi$  ab. Hierin kommt die Verallgemeinerung gegenüber der Anwendung des Verfahrens bei selbstadjungierten Aufgaben zum Ausdruck.

Genau wie bei den selbstadjungierten Aufgaben läßt sich zeigen, daß  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mu_r = \lambda_s - t = \bar{\lambda}_s$  gilt, wo  $\lambda_s$  der zu  $t$  nächste Eigenwert mit  $\langle q_0, y_s \rangle \neq 0$  ist. Konvergenzbeschleunigung kann erzielt werden, wenn von Schritt zu Schritt das Iterationszentrum  $t$  verbessert wird, d. h. näher zum gesuchten Eigenwert  $\lambda_s$  gelegt wird.

Überdies gilt der *Einschließungssatz* von Kryloff — Bogoliubov [7] für symmetrisierbare Eigenwertaufgaben. Der Satz besagt, daß zwischen  $\mu_2 - \sqrt{\mu_2(\mu_1 - \mu_2)}$  und  $\mu_2 + \sqrt{\mu_2(\mu_1 - \mu_2)}$  mindestens ein Eigenwert  $\bar{\lambda}_r = \lambda_r - t$  liegt. (Zum Beweis: Mit  $\langle q_0, y_k \rangle = c_k$  wird  $\langle q_i, y_k \rangle = c_k/\bar{\lambda}_k^i$ , und mittels (6) und (7) zeigt man  $\mu_2(\mu_1 - \mu_2) = \frac{1}{a_2} (a_2 \mu_2^2 - 2a_1 \mu_2 + a_0) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (c_k/\bar{\lambda}_k)^2 (\mu_2 - \bar{\lambda}_k)^2 / \sum_{k=1}^{\infty} (c_k/\bar{\lambda}_k)^2 \geq (\mu_2 - \bar{\lambda}_r)^2$ , wenn  $\lambda_r$  der zu  $\mu_2 + t$  nächstgelegene Eigenwert ist).

Zur Durchführung eines Ritz'schen Verfahrens können die Extremaleigenschaften des mit  $\Phi$  gebildeten Rayleigh'schen Quotienten  $R[u]$  oder auch die des mit  $\Phi$  gebildeten Temple'schen Quotienten  $T_r[u] = \mu_2(\mu_1 - \tau)/(\mu_2 - \tau)$  ( $u = q_0$ ) herangezogen werden. Das Verfahren gestaltet sich genauso wie bei den selbstadjungierten Problemen. Die dort geltenden Sätze behalten bei den symmetrisierbaren Aufgaben ihre Gültigkeit. Der Temple'sche Quotient kann ebenso wie dort zur Einschließung von Eigenwerten herangezogen werden (vgl. [8]).

Zur Illustration seien zwei Beispiele vorgeführt.

Beispiel 1.

$$y^{IV} + 20y = -\lambda y'', \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0.$$

Der erste Eigenwert soll näherungsweise bestimmt werden (vgl. [2], S. 157 und S. 199).

Diese Aufgabe besitzt u. a. die vollen definiten Vergleichsoperatoren

$$\Phi_0 \equiv 1, \quad \Phi_1 \equiv -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \Phi_2 \equiv \frac{d^4}{dx^4}.$$

(Ein weiterer Vergleichsoperator ist z. B. durch  $\Phi[y] \equiv -\int_{-1}^1 p(x, \xi) y(\xi) d\xi$ , wo  $p(x, \xi)$  die Greensche Funktion zum Differentialausdruck  $L[y] = y''$  und den Randbedingungen  $y(\pm 1) = 0$  ist, definiert).

Zur Durchführung des Verfahrens der schrittweisen Näherungen werden zwei Funktionen  $q_0, q_1 \in \mathfrak{B}$  bestimmt, die mit  $t = 0$  in der Beziehung (8) stehen. Wählt man als Ausgangsfunktion  $q_1(x) = 61 - 75x^2 + 15x^4 - x^6$ , dann wird  $q_0(x) = 644 \frac{9}{14} - 790x^2 + 155x^4 - 10x^6 + \frac{5}{14}x^8$ .

In der folgenden Tabelle sind die Werte von  $\mu_r$ , die sich mit  $q_0, q_1$  bei Verwendung von  $\Phi_r$  ( $r = 0, 1, 2$ ) ergeben, gegenübergestellt.

	$r = 2$	$r = 1$	$r = 0$
$\mu_1$	10,5784	10,5736	10,5731 48
$\mu_2$	10,5752	10,5733	10,5731 20
K.—B.	10,3896	10,5186	10,5559 14



In der letzten Zeile der Tabelle sind die nach Kryloff-Bogoliubov berechneten unteren Schranken angegeben;  $\mu_1$  und  $\mu_2$  liefern obere Schranken. Die exakten Eigenwerte der Aufgabe sind gegeben durch  $\lambda_k = (20 + (k\pi/2)^4)/(k\pi/2)^2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Der erste Eigenwert ist  $\lambda_1 = 10,573096$ .

Beispiel 2.

$$y''' + y'' - y' - y = \lambda [xy' + (x-1)y]$$

$$y(-1) = y'(-1) = y(0) = 0.$$

Hier ist  $\Phi \equiv N$  ein volldefinierter Vergleichsoperator. Zur Bestimmung des ersten Eigenwertes wurde von  $q_0 = x(1+x)^2 \in \mathfrak{B}$  ausgehend durch numerische Integration die erste iterierte  $q_1 \in \mathfrak{B}$  ( $M[q_1] = N[q_0]$ , Iterationszentrum  $t=0$ ) berechnet. Als Resultat ergab sich:  $\mu_1 = 24,828$ ,  $\mu_2 = 24,665$  und die Schranken (Kryloff-Bogoliubov)

$$22,660 \leq \lambda_1 \leq 24,665.$$

Zu besseren Schranken gelangt man, wenn man anstelle des Iterationszentrums  $t=0$  das Zentrum  $t_0 = R[q_0] = 25,125$  benutzt und eine Funktion  $q_1^* \in \mathfrak{B}$ , die mit  $q_0$  in der Beziehung  $M[q_1^*] - t_0 N[q_1^*] = N[q_0]$  steht, bestimmt. Die Rechnung lieferte:  $\mu_1 = -1,180$ ,  $\mu_2 = -1,169$ , und nach Kryloff-Bogoliubov ergeben sich die Schranken  $-1,289 \leq \lambda_1 \leq -1,049$  bzw.

$$23,836 \leq \lambda_1 \leq 24,076.$$

(Die Rechnungen wurden auf der Göttinger elektronischen Rechenmaschine G1 durchgeführt.)

Zusammenfassend läßt sich sagen: Durch die Betrachtung der symmetrisierbaren Eigenwertaufgaben wird eine über die selbstadjungierten Probleme hinausgehende, umfassendere Klasse von Eigenwertproblemen der praktischen Behandlung zugänglich gemacht, falls sich für diese Vergleichsoperatoren angeben lassen. Für die Behandlung selbstadjungierter Aufgaben ergibt sich insofern ein neuer Gesichtspunkt, als man in den Fällen, in denen außer dem Einheitsoperator ( $\Phi \equiv 1$ ) weitere Vergleichsoperatoren angegeben werden können, Freiheit in der Wahl des Operators für die numerische Rechnung besitzt.

### Literatur

- [1] E. Kamke: Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gew. lin. Diffgl. I—IV. Math. Z. 45 (1939); 46 (1940) und 48 (1942);
- [2] L. Collatz: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1949.
- [3] A. C. Zaanen: Über vollstetige symmetrische und symmetrisierbare Operatoren. Nieuw Archief v. Wiskunde (2) 22 (1943).
- [4] A. C. Zaanen: Linear Analysis, Amsterdam 1953.
- [5] W. Schmiedler: Über normalisierbare Operatoren. Archiv d. Math. 1 (1948).
- [6] H.-K. Dettmar: Über die symmetrisierbaren Eigenwertaufgaben bei gew. lin. Diffgl. Dissertation, Göttingen 1953.
- [7] N. Kryloff und N. Bogoliubov: Bell. Acad. Sci. URSS, Leningrad 1929.
- [8] N. J. Lehmann: Beiträge zur numerischen Lösung linearer Eigenwertprobleme. Z. angew. Math. Mech. 29 (1949) und 30 (1950).

## Funktionentheoretische Methoden bei Übertragungs- und Regelungsproblemen

Von Johannes Dörr in Darmstadt \*)

Die Eigenschaften eines geplanten elektrischen Übertragungssystems lassen sich in groben Zügen durch Wahl des Betrages der Übertragungsfunktion  $|Z(\omega)|$  festlegen. Dabei muß  $Z(\omega)$  eine gebrochen rationale Funktion sein, die nicht mehr Nullstellen als Pole hat und deren Pole alle in der oberen Halbebene liegen. Außerdem muß für die reelle Achse gelten

$$|Z(\omega)| = |Z(-\omega)|, \quad \arg Z(\omega) = -\arg Z(-\omega).$$

Nur unter diesen Voraussetzungen ist das System mit endlich vielen Schaltelementen realisierbar und besitzt stabile Übertragungseigenschaften.

Im Einzelnen lassen sich die Übertragungseigenschaften erst beurteilen, wenn man zu typischen Ursachen  $u(t)$  die zugehörigen Wirkungen  $U(t)$  berechnet. Gibt man sich die Ursache als Fourierintegral

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \dots \quad (1a),$$

so gewinnt man für die Wirkung ebenfalls eine Integraldarstellung

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \dots \quad (1b).$$

Dieser Zusammenhang stellt zugleich die mathematische Definition der Übertragungsfunktion dar. Die vorher angegebenen Bedingungen für  $Z(\omega)$  folgen aus physikalischen Betrachtungen.

Wie findet man nun eine solche regulär analytische Funktion  $Z(\omega)$ , deren Betrag auf der reellen Achse einen vorgegebenen Verlauf hat oder mit diesem vorgegebenen Verlauf möglichst

\*) Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt.



gut übereinstimmt? Zur Lösung dieses sogenannten Realisierungsproblems wird hier am Beispiel des elektrischen Tiefpasses ein funktionentheoretisches Verfahren angegeben.

Als Einführung wird zunächst die *Butterworth-Approximation* funktionentheoretisch hergeleitet. Durch

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma=1} \frac{1}{\lambda - \omega} d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{für } |\omega| > 1 \\ 1 & \text{für } |\omega| < 1 \end{cases}$$

wird eine Funktion beschrieben, die im Inneren des Einheitskreises, also auch auf dem Stück der reellen Achse  $-1 < \omega < +1$  konstant, außerhalb des Einheitskreises aber Null ist. Durch Übertragung ins Finite gewinnen wir daraus gebrochen rationale Funktionen der Form

$$f_N(\omega) = \frac{1}{2N} \sum_{\nu=1}^{2N} \frac{e^{i\varphi_\nu}}{e^{i\varphi_\nu} - \omega} = \frac{1}{1 + \omega^{2N}} \dots \dots \dots (2a)$$

mit

$$\varphi_\nu = (2\nu - 1) \frac{\pi}{2N} \dots \dots \dots (2b).$$

Man kann (2a) auch auf die Form bringen

$$f_N(\omega) = \prod_{\nu=1}^{2N} \frac{1}{\omega - e^{i\varphi_\nu}} \dots \dots \dots (2c).$$

Für die reelle Achse hat  $f_N(\omega)$  bei genügend großem  $N$  den für einen Tiefpaß gewünschten Verlauf, aber  $f_N(\omega)$  hat auch in der unteren Halbebene Pole. Lassen wir in der Produktdarstellung (2c) alle Faktoren fort, deren Pole in der unteren Halbebene liegen, so entsteht, wie man aus den Symmetrieeigenschaften von (2c) leicht erkennt, eine Funktion, deren Betrag auf der reellen Achse ebenfalls den für einen Tiefpaß gewünschten Verlauf hat. Das heißt,

$$B_N(\omega) = \prod_{\nu=1}^N \frac{1}{\omega - e^{i\varphi_\nu}}$$

ist bei genügend großem  $N$  als Übertragungsfunktion eines Tiefpasses geeignet.

Diese Übertragungsfunktionen haben jedoch die unangenehme Eigenschaft, daß  $\arg B_N(\omega)$  stark vom Approximationsgrad  $N$  abhängt. Die Phase  $\arg Z(\omega)$  beeinflusst aber ebenfalls die Übertragungseigenschaften. Man muß deshalb bei der Realisierung auch den Phasenverlauf in gewissen Grenzen beherrschen.

Um zu Übertragungsfunktionen zu gelangen, die sowohl in ihrem Betrag als auch in ihrer Phase festgelegt sind, gehen wir von folgenden speziellen Funktionen aus:

$$Z_n(\omega) = (\sqrt{1 - \omega^2} - i\omega)^n \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (3a).$$

Eine Untersuchung von  $|Z_n(\omega)|$  und  $\arg Z_n(\omega)$  für die reelle Achse zeigt, daß diese Funktionen als Übertragungsfunktionen für Tiefpässe hervorragend geeignet sind<sup>1)</sup>. Zur Realisierung muß man aber die  $Z_n(\omega)$  durch gebrochen rationale Funktionen approximieren. Zur Bewältigung dieser Aufgabe suchen wir nach dem Vorbild des vorhergehenden Beispiels nach einer Integraldarstellung

$$Z_n(\omega) = \int_{\sigma} \frac{\Gamma_n(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda \dots \dots \dots (3b).$$

Wenn eine solche Integraldarstellung existiert, so liefert die Übertragung ins Finite sofort eine Approximation durch gebrochen rationale Funktionen.

Wir gehen aus von der *Cauchy* schen Integralformel in der speziellen Form

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_s F(v) \left( \frac{1}{v - z} + \frac{1}{v + 1/z} \right) dv \dots \dots \dots (4a).$$

Dabei sollen die Punkte  $v = z$  und  $v = 0$  im Innern des vom Weg  $s$  umschlossenen Gebietes liegen, und der Weg  $s$  soll im abgeschlossenen Bereich eines durch die Punkte  $\pm i$  laufenden Kreises liegen. Auf  $s$  und in dem von  $s$  umschlossenen Gebiet soll  $F(v)$  regulär analytisch sein.

Mit der Transformation

$$z = \sqrt{1 - \omega^2} - i\omega, \quad v = \sqrt{1 - \lambda^2} - i\lambda \dots \dots \dots (4b)$$

$$F(z(\omega)) = f(\omega) = g(\omega) + h(\omega) \sqrt{1 - \omega^2} \dots \dots \dots (4c)$$

<sup>1)</sup> A. Walther und J. Dörr, Typische Einschwingvorgänge zu fundamentalen Übertragungsfunktionen, A.E.Ü. 7, 379—386 (1953).



entsteht nach einigen Umformungen aus (4a) die Darstellung

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\sigma} \frac{f(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma} \frac{f(\lambda)}{\lambda-\omega} d\lambda \dots \dots \dots (5a).$$

Dabei geht der geschlossene Weg  $s$  in den geschlossenen Weg  $\sigma$  über. Der Punkt  $\omega$  liegt aber hier außerhalb des von  $\sigma$  berandeten Gebietes. Daraus folgt wegen der Zerlegung (4c):

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\sigma} \frac{g(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma} \frac{h(\lambda) \sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda-\omega} d\lambda \dots \dots \dots (5b).$$

Wählen wir als Weg  $s$  einen Kreis, der durch die Punkte  $z = \mp i$  läuft, so läßt sich dafür auch schreiben

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{g(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda - \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{h(\lambda) \sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda-\omega} d\lambda \dots \dots \dots (5c).$$

Der Integrationsweg ist dann ein beliebiges von  $-1$  nach  $+i$  geführtes Kreisbogenstück. Man kann aber den Weg  $s$  allgemeiner so wählen, daß sich in der Darstellung (5c) ein doppel-punktfreier Weg ergibt, der beliebig von  $-1$  nach  $+1$  läuft.

In (5c) haben wir die gewünschte Integraldarstellung gefunden. Mit  $F(z) = z^n$ , also

$$f(\omega) = (\sqrt{1-\omega^2} - i\omega)^n = (-i)^n [T_n(\omega) + iU_n(\omega) \sqrt{1-\omega^2}]$$

ergibt sich

$$(\sqrt{1-\omega^2} - i\omega)^n = -\frac{(-i)^n}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{U_n(\lambda) \sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda-\omega} d\lambda.$$

Die  $U_n(\lambda)$  sind dabei die T s c h e b y s c h e f f schen Polynome zweiter Art. Denken wir uns in der letzten Integraldarstellung den Integrationsweg im Halbkreis von  $-1$  nach  $+1$  durch die obere Halbebene geführt, so liefert die Übertragung ins Finite die realisierbare Approximation

$$Z_n(\omega) \approx \frac{1}{N} (1-i) (-i)^{n+1} \sum_{v=1}^N \frac{\sqrt{\sin \varphi_v} U_n(e^{i\varphi_v}) e^{i3/2 \varphi_v}}{\omega - e^{i\varphi_v}} \dots \dots \dots (6)$$

mit

$$\varphi_v = \frac{\pi}{2N} (2v-1).$$

Diese Reihen ergeben auch bei relativ wenig Summengliedern  $N$  recht gute Approximationen. Wenn deshalb  $N$  nicht extrem klein gewählt wird, darf man bei der Berechnung der Wirkungen nach Integral (1b) als Übertragungsfunktion den Ausdruck (3a) an Stelle des unhandlicheren Summenausdrucks (6) einsetzen<sup>2)</sup>. Dabei treten, wenn man als Ursachen Sinusquadratfunktionen wählt, Integrale über Produkte von B e s s e l funktionen mit Exponentialfunktionen auf<sup>3)</sup>. Nur für die Realisierung der Übertragungsfunktion in Form eines Netzwerkes ist in diesem Fall die Approximation unbedingt erforderlich.

## Neue Verfahren zur direkten Lösung des allgemeinen Matrizen-eigenwertproblem es

Von Sigurd Falk in Braunschweig

Die Umwandlung des allgemeinen Matrizen-eigenwertproblem es  $\mathfrak{A}x = k\mathfrak{B}x$  der Ordnung  $n$  in das spezielle Problem  $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}x = kx$  erfordert rund  $4/3 n^3$  Multiplikationen, die anschließende Transformation von H e s s e n b e r g (oder eine ihr gleichwertige andere) etwa  $n^3$  Mult., so daß zur Aufstellung des charakteristischen Polynomes  $\varphi(k) = |\mathfrak{A} - k\mathfrak{B}|$  rund  $7/3 n^3$  Mult. erforderlich sind. Es werden zwei Verfahren entwickelt, die nur  $6/3 n^3$  Mult. benötigen und sich stark schematisieren lassen. Voraussetzungen werden nicht gemacht;  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  dürfen beide singulär sein.

<sup>2)</sup> Siehe <sup>1)</sup>, S. 380.

<sup>3)</sup> J. D ö r r, Unbestimmte Integrale über Produkte von B e s s e l funktionen mit Exponentialfunktionen, Wiss. Zeitschrift Techn. Hochsch. Dresden 2, 353—354 (1952/53).



Verfahren 1: Verallgemeinerung der Methode von Hessenberg. Die gegebene Matrix  $\mathfrak{B}$  wird mittels Zeilenkombinationen in eine untere Dreiecksmatrix  $\tilde{\mathfrak{B}}$  übergeführt, dabei geht  $\mathfrak{A}$  in  $\tilde{\mathfrak{A}}$  über.  $\tilde{\mathfrak{A}}$  und  $\tilde{\mathfrak{B}}$  lassen sich nun in einem geschlossenen Rechengang in  $\mathfrak{S}$  (Hessenbergmatrix) und  $\mathfrak{C}$  (Einheitsmatrix) transformieren: wir multiplizieren die Gleichung

$$\tilde{\mathfrak{A}} \mathfrak{x} = k \tilde{\mathfrak{B}} \mathfrak{x} \dots \dots \dots (1)$$

von links mit der nichtsingulären Matrix  $\mathfrak{L}$  und führen neue Vektoren ein:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{R} \mathfrak{y}; \quad |\mathfrak{R}| \neq 0 \dots \dots \dots (2).$$

Dann wird aus (1)

$$\mathfrak{L} \tilde{\mathfrak{A}} \mathfrak{R} \mathfrak{y} = k \mathfrak{L} \tilde{\mathfrak{B}} \mathfrak{R} \mathfrak{y} \dots \dots \dots (3).$$

Jetzt soll

$$\mathfrak{L} \tilde{\mathfrak{A}} \mathfrak{R} = \mathfrak{S} \quad \text{oder} \quad \tilde{\mathfrak{A}} \mathfrak{R} = \mathfrak{L}^{-1} \mathfrak{S} \dots \dots \dots (4)$$

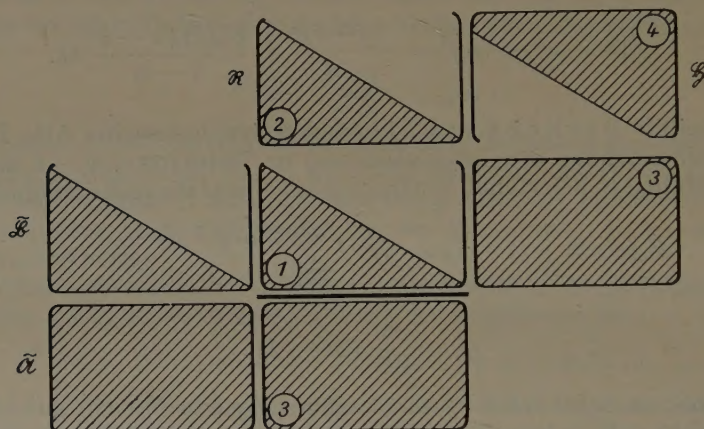
und

$$\mathfrak{L} \tilde{\mathfrak{B}} \mathfrak{R} = \mathfrak{C} \quad \text{oder} \quad \tilde{\mathfrak{B}} \mathfrak{R} = \mathfrak{L}^{-1} \dots \dots \dots (5)$$

sein, daraus folgt nach Elimination von  $\mathfrak{L}^{-1}$ :

$$\tilde{\mathfrak{A}} \mathfrak{R} = \tilde{\mathfrak{B}} \mathfrak{R} \mathfrak{S} \dots \dots \dots (6).$$

In dieser Matrizengleichung sind  $\tilde{\mathfrak{A}}$  und  $\tilde{\mathfrak{B}}$  gegeben,  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{S}$  gesucht. Nun zeigt sich, daß  $\mathfrak{R}$ , somit auch  $\tilde{\mathfrak{B}} \mathfrak{R}$  eine untere Dreiecksmatrix ist, demnach hat Gl. (6) die Form:



Hierin ist ① das Produkt von  $\tilde{\mathfrak{B}}$  und  $\mathfrak{R}$ , ③ einerseits das Produkt von  $\tilde{\mathfrak{A}}$  und  $\mathfrak{R}$ , andererseits das Produkt von ① und ④, also ist  $\tilde{\mathfrak{A}} \mathfrak{R} = \tilde{\mathfrak{B}} \mathfrak{R} \mathfrak{S}$ , wie Gl. (6) es verlangt. Die erste Spalte von ④ wählt man nun beliebig, (am einfachsten einen Einheitsvektor); dann lassen sich der Reihe nach die ersten Spalten von ②, ③ und ④ eindeutig berechnen, außerdem die zweite Spalte von ①. Damit liegen dann ebenso alle zweiten Spalten von ②, ③ und ④ und die dritte Spalte von ① fest, und so fort, bis sämtliche Matrizen ausgefüllt sind. Dabei ist jedes gesuchte Element einzige Unbekannte in einer linearen Gleichung. In Ausnahmefällen müssen in ① und ② Spalten vertauscht werden, auch kann  $\mathfrak{S}$  zerfallen. Zum Schluß wird das Polynom  $|\mathfrak{S} - k \mathfrak{C}|$  rekursiv aufgestellt, der Eigenvektor  $\mathfrak{y}_v$  zum Eigenwert  $k_v$  berechnet und nach (2) zurücktransformiert.

Falls  $\mathfrak{B}$  singularär ist, verläuft die Umwandlung in die untere Dreiecksmatrix  $\tilde{\mathfrak{B}}$  in etwas abgeänderter Weise.

Verfahren 2: Es wird nicht  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  je für sich, sondern die Polynommatrix  $\mathfrak{P}(k) = -k \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$  insgesamt transformiert, wobei lediglich Zeilen, nicht Spalten von  $\mathfrak{P}(k)$  zu kombinieren sind. Mit Hilfe des Begriffes der einer beliebigen Polynommatrix zugeordneten „Koeffizientenmatrix“ lassen sich die von den Matrizen mit konstanten Elementen geläufigen Rechenverfahren auf Polynommatrizen übertragen. Zum Schluß bleibt im wesentlichen eine zweireihige Matrix übrig, deren Elemente Polynome in  $k$  sind, und zwar im allgemeinen vom Grade  $n/2$  bei geradem  $n$  und vom Grade  $\frac{n+1}{2}$  bzw.  $\frac{n-1}{2}$  bei ungeradem  $n$ . Auch Aufgaben der Art  $(k^2 \mathfrak{A} + k \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) \mathfrak{x} = 0$ ,  $(\lambda \mathfrak{A} + k \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) \mathfrak{x} = 0$  usw. lassen sich ohne weiteres behandeln.



Sämtliche Eigenvektoren sind bei berechnetem Eigenwert unabhängig voneinander leicht zu gewinnen.

Hauptveröffentlichung mit mehreren Zahlenbeispielen: „Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band VI, 1954“. Verlag Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1954. Dort ist das Verfahren 1 mit II, Verfahren 2 mit III bezeichnet.

## Eine Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen und partiellen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Von *Helmut Grunsky* in Mainz

a) Das Wesen der Methode wird bei einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung am deutlichsten und der äußerst einfache und übersichtliche Weg zu bekannten Resultaten kann als Vorbild für die höheren Fälle dienen.

Gegeben sei die Differentialgleichung  $y' + a_1(x)y = 0$ ; gesucht ist die Lösung  $y(x)$  mit  $y(x_0) = y_0$ .

Wenn  $l_1(\xi)$  eine Stammfunktion von  $a_1(\xi)$  bezeichnet, so ist:

$$[y]_{x_0}^x = \int_{x_0}^x y'(\xi) d\xi = - \int_{x_0}^x a_1 y d\xi = - [l_1 y]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x l_1 y' d\xi = - [l_1 y]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x l_1 a_1 y d\xi.$$

Setzt man nun  $l_1 a_1 = a_2$ , so läßt sich die partielle Integration iterieren und man erhält schließlich:

$$[y]_{x_0}^x = - \left[ \left( \sum_{v=1}^n l_v \right) y \right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x a_{n+1} y d\xi, \quad l'_v = a_v = l_{v-1} a_1.$$

Die  $l_v(\xi)$  können noch in verschiedener Weise normiert werden. Wählt man stets  $l_v(x) = 0$ , so strebt das Restintegral gegen 0 mit  $n \rightarrow \infty$  und man erhält

$$y(x) = y(x_0) \cdot \exp \left\{ - \int_{x_0}^x a_1(\xi) d\xi \right\},$$

wobei  $\exp \{ \dots \}$  als Abkürzung für die  $e$ -Reihe steht. — Daß auch eine andere Normierung von Interesse sein kann, sieht man an dem speziellen Fall  $a_1(x) \equiv 1$ . Wählt man hier die  $l_v$  als die B e r n o u l l i schen Polynome für das Intervall  $x_0 \leq \xi \leq x$ , so erhält man mit  $h = x - x_0$  die bekannte Beziehung

$$\left( \sum_{v=0}^{\infty} \frac{B_v}{v!} (-h)^v \right) y(x) = \left( \sum_{v=0}^{\infty} \frac{B_v}{v!} h^v \right) y(x_0),$$

wo die  $B_v$  die B e r n o u l l i schen Zahlen sind.

b) Liegt für die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

das Anfangswertproblem  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$  vor, so gehe man von der Formel aus:

$$y(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - \xi) y''(\xi) d\xi.$$

Ersetzt man hier  $y''(\xi)$  vermöge (1) durch  $y'$  und  $y$  und formt die dann auftretenden Integrale durch partielle Integration um, indem man wieder auf  $y''$  hinstrebt, so erhält man mit den Bezeichnungen:

$$A'_1(\xi) = a_1(\xi) = (x - \xi) a(\xi), \quad B''_1(\xi) = b_1(\xi) = (x - \xi) b(\xi),$$

$$y(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) - [B'_1 y]_{x_0}^x + [(B_1 - A_1) y']_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (A_1 - B_1) y'' d\xi.$$

Verfährt man mit dem Restintegral ebenso, so kommt nach  $n$ -maliger Iteration:

$$y(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) - \left[ \left( \sum_{v=1}^n B'_v \right) y \right]_{x_0}^x + \left[ \left( \sum_{v=1}^n (B_v - A_v) \right) y' \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (A_n - B_n) y'' d\xi$$

mit

$$A'_v = a_v = (A_{v-1} - B_{v-1})a; \quad B''_v = b_v = (A_{v-1} - B_{v-1})b \quad (v \geq 2).$$



Bei der noch freien Normierung der  $A_v(\xi)$  und  $B_v(\xi)$  hat man darauf zu achten, daß  $y'(x)$  nicht auftreten darf, d. h. es ist zu fordern  $\sum_{v=1}^n (B_v(x) - A_v(x)) = 0$ . Natürlich wird man i. a. schon das einzelne Glied dieser Summe gleich 0 wählen. Es ist leicht zu sehen, daß der Prozeß sicher dann konvergent ausfällt, wenn man ferner  $B'_v(x) = 0$  setzt. Hat man es mit dem Fall  $a(x) \equiv 0$  zu tun, wenn man ferner  $B_v(x) \equiv 0$  setzt. Hat man es mit dem Fall  $a(x) \equiv 0$  zu tun, so sind alle  $A_v \equiv 0$  und für  $B_n$  hat man die günstige Abschätzung:

$$|B_n| \leq \frac{M^n \cdot |x - \xi|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

wo  $M$  eine Schranke für  $|b(\xi)|$  in  $x_0 \leq \xi \leq x$  bedeutet.

In gewissen Fällen kann eine Modifikation des Verfahrens zweckmäßig sein; liegt z. B. die Besselsche Differentialgleichung vor

$$x y'' + y' + x y = 0 \quad \dots \quad (2)$$

so gehe man aus von

$$\int_{x_0}^x \xi y''(\xi) d\xi = [\xi y'(\xi) - y(\xi)]_{x_0}^x = - \int_{x_0}^x (y'(\xi) + \xi y(\xi)) d\xi.$$

Nun strebt man bei der partiellen Integration immer auf  $\xi y''(\xi)$  hin und ersetzt diesen Ausdruck vermöge (2) durch  $-(y' + \xi y)$ . Man erreicht dadurch, daß als bekannte Funktionen, mit deren Hilfe die Lösung ausgedrückt wird, nur Polynome auftreten.

c) Liegt eine hyperbolische partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in der Normalform vor:

$$u_{xy} + a_1(x, y) u_x + b_1(x, y) u_y + c_1(x, y) u = 0,$$

so wollen wir uns (der Einfachheit halber) das charakteristische Anfangswertproblem stellen:

$$u = \alpha(x) \quad \text{für} \quad y = y_0, \quad u = \beta(y) \quad \text{für} \quad x = x_0.$$

Mit  $\mathfrak{R}$  sei das Rechteck  $x_0 \leq \xi \leq x$ ,  $y_0 \leq \eta \leq y$  bezeichnet, mit  $R$  sein Rand. Wir gehen aus von der Formel:

$$[u]_{\mathfrak{R}} = \iint_{\mathfrak{R}} u_{xy}(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

in der  $[u]_{\mathfrak{R}}$  die Wechselsumme der Funktionswerte von  $u$  in den Ecken von  $\mathfrak{R}$  bezeichnet. Nun folgt durch partielle Integration, wenn  $l_1(\xi, \eta)$  eine Funktion mit

$$l_{1;\xi\eta}(\xi, \eta) = a_{1;\xi}(\xi, \eta) + b_{1;\eta}(\xi, \eta) - c_1(\xi, \eta)$$

bedeutet:

$$\begin{aligned} [u]_{\mathfrak{R}} &= - \iint_{\mathfrak{R}} (a_1 u_{\xi} + b_1 u_{\eta} + c_1 u) d\xi d\eta \\ &= - \iint_{\mathfrak{R}} (l_1 u)_{\xi\eta} d\xi d\eta + \int_R u ((b_1 - l_{1;\xi}) d\xi - (a_1 - l_{1;\eta}) d\eta) + \iint_{\mathfrak{R}} l_1 u_{\xi\eta} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Damit in  $\int_R$  nur Bekanntes auftritt, ist  $l_1(\xi, \eta)$  so zu normieren, daß

$$l_{1;\xi}(\xi, y) = b_1(\xi, y), \quad l_{1;\eta}(x, \eta) = a_1(x, \eta).$$

Damit ist  $l_1$  bis auf eine additive Konstante festgelegt. Das erste Integral der rechten Seite ist  $-[l_1 u]_{\mathfrak{R}}$ , also teils durch Bekanntes, teils durch die gesuchte Größe  $u(x, y)$  ausgedrückt. Iteration führt schließlich zu

$$\left[ \left( \sum_{v=0}^n l_v \right) u \right]_{\mathfrak{R}} = \int_{x_0}^x \left( \sum_{v=1}^n B_v(\xi, y_0) \right) \alpha(\xi) d\xi + \int_{y_0}^y \left( \sum_{v=1}^n A_v(x_0, \eta) \right) \beta(\eta) d\eta + \iint_{\mathfrak{R}} l_n u_{\xi\eta} d\xi d\eta$$

mit

$$\begin{aligned} l_{n;\xi\eta} &= a_{n;\xi} + b_{n;\eta} - c_n, & l_{n;\xi}(\xi, y) &= b_n(\xi, y), & l_{n;\eta}(x, \eta) &= a_n(x, \eta); & l_0 &\equiv 1; \\ a_n &= l_{n-1} a_1, & b_n &= l_{n-1} b_1, & c_n &= l_{n-1} c_1; & A_n &= a_n - l_{n;\eta}, & B_n &= b_n - l_{n;\xi} \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Falls  $a_1 \equiv b_1 \equiv 0$  ist und alle  $l_n$  so normiert werden, daß  $l_n(x, y) = 0$  (in welchem Falle übrigens das Verfahren mit dem Picard'schen Iterationsverfahren zusammenfällt) findet man

$$|l_n \xi, \eta| \leq \frac{M^n |x - \xi|^n |y - \eta|^n}{n!^2},$$

wo  $M$  eine Schranke für  $|c|$  in  $\mathfrak{R}$  bedeutet.

Auch hier können gewisse Modifikationen wie bei b) zweckmäßig sein.



## Zur Nomographierbarkeit höherer Funktionen

Von W. Händler in Hamburg

Als neuere Entwicklungsrichtung in der Nomographie kann die systematische Untersuchung der Nomographierbarkeit von bestimmten Funktionenklassen gelten. Funktionen komplexer Veränderlicher  $F(w, z) = 0$  wurden insbesondere von I. A. Willner (z. B. Mathematische Zeitschrift *Математический Сборник* T 27 (69) N. 1 1950 S. 3—46 (russ.)) untersucht. Dabei soll die Lösung als eine Fluchtgerade in einem Nomogramm mit 4 Funktionsleitern dargestellt werden. ( $a, b, p, q$ ; wenn  $z = a + ib$  und  $w = p + iq$ ). Läßt man zu, daß bis zu zwei der Funktionsleiter krummlinig sein können, so ist als Bedingung für die Nomographierbarkeit notwendig und hinreichend, daß die folgenden Differentialparameter mit

$$\varphi = \frac{dw}{dz}$$

$$I_1(\varphi) = \frac{\left(\frac{1}{\varphi^2} (\ln \varphi)''\right)'}{4 \varphi^2 (\ln \varphi)'}, \quad I_2(\varphi) = -\frac{\varphi^3}{2 \varphi'} \left(\frac{1}{\varphi^4} (\ln \varphi)''\right)', \quad I_3(\varphi) = \frac{\varphi^5}{2 \varphi'} \left(\frac{1}{\varphi \varphi'} \left(\frac{(\ln \varphi)''}{\varphi^2}\right)'\right)' \quad (1)$$

konstant und reell sind. Sämtliche nomographierbaren Funktionen können im übrigen aus der Integration einer der beiden folgenden Differentialgleichungen gewonnen werden:

$$w''^2 = I_1 w'^6 + I_2 w'^4 + I_3 w'^2 \quad (2),$$

$$z''^2 = I_1 + I_2 z'^2 + I_3 z'^4 \quad (3).$$

Lösungen von (2) bzw. (3) sind neben einer Reihe bekannter elementarer Funktionen die elliptischen Integrale

$$w - w_0 = M \int_0^{\gamma(z-z_0)} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}, \quad \text{worin } k^2, M, \gamma^2 \text{ reell} \quad (4)$$

bzw.

$$w - w_0 = \frac{Nk}{1+i} \int_0^{\gamma(z-z_0)} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}, \quad \text{worin } N, \gamma^2 \text{ reell und } |k'| = 1 \text{ sowie } \bar{k} = \pm \frac{ik}{k'} \quad (5).$$

Von diesen beiden Grundformen gelangt man auf dem Wege über bekannte Beziehungen z. B. zwischen den elliptischen Funktionen *J a c o b i s*, *W e i e r s t r a ß* zu einer Reihe von anderen Nomogrammdarstellungen. Für einen festen Modul  $k = \text{konstant}$  erhält man zunächst ein Nomogramm mit 2 geradlinigen Leitern für  $a$  und  $b$  (nach Voraussetzung) und mit 2 krummlinigen Leitern für  $p$  und  $q$  in Form eines Kegelschnittes. Variiert man den Modul  $k$ , so erhält man ein ganzes Kegelschnittbüschel und kann mit einem einzigen Nomogramm den ganzen Wertevorrat einer elliptischen Funktion, eines elliptischen Integrals, bzw. des Integrals oder Logarithmus einer elliptischen Funktion in Abhängigkeit von Modul  $k$  übersehen.

Der Entwurf eines Nomogramms führt über die sogenannte „kanonische Darstellung“, nach der alle Größen in reeller Form als Gleichungssystem geschrieben werden. Die „kanonische Darstellung“ lautet etwa für (4) mit reellem  $\gamma$ :

$$\left. \begin{aligned} (+1) \cos [2 \gamma (a - a_0)] + k^2 \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{\alpha_3^2} \mathfrak{C} \mathfrak{O} [2 \gamma (b - b_0)] + \frac{\alpha_1^2 \alpha_3^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2} &= 0 \\ \frac{k^2 \beta_1'^2}{\beta_2'^2 \beta_3'^2} \cos [2 \gamma (a - a_0)] + (-1) \mathfrak{C} \mathfrak{O} [2 \gamma (b - b_0)] + \frac{1 - k'^2 \beta_1'^4}{\beta_2'^2 \beta_3'^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6).$$

Darin sind

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= sn \left[ Re \frac{w - w_0}{M}; k \right], & \alpha_2 &= cn \left[ Re \frac{w - w_0}{M}; k \right], & \alpha_3 &= dn \left[ Re \frac{w - w_0}{M}; k \right], \\ \beta_1' &= sn \left[ Im \frac{w - w_0}{M}; k' \right], & \beta_2' &= cn \left[ Im \frac{w - w_0}{M}; k' \right], & \beta_3' &= dn \left[ Im \frac{w - w_0}{M}; k' \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

( $sn, cn, dn$  *J a c o b i* sche Elliptische Funktionen).



Zum Zwecke der geometrischen Interpretation bildet man aus (6) eine 4-reihige Matrix vom Range 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{k^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2}{\alpha_3^2} & \frac{\alpha_1^2 \alpha_3^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2} \\ \frac{k^2 \beta_1'^2}{\beta_2'^2 \beta_3'^2} & -1 & \frac{1 - k'^2 \beta_1'^4}{\beta_2'^2 \beta_3'^2} \\ 1 & 0 & \cos 2\gamma (a - a_0) \\ 0 & 1 & \cos 2\gamma (b - b_0) \end{pmatrix} \dots \dots \dots (8).$$

Die Struktur eines Nomogramms liegt damit bis auf Kollineationen fest. Das Nomogramm hat im einfachsten Fall die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2 \alpha_3^2 - \alpha_2^2} & \frac{k^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2}{\alpha_1^2 \alpha_3^2 - \alpha_2^2} & 1 \\ \frac{k^2 \beta_1'^2}{1 - k'^2 \beta_1'^4} & -\frac{\beta_2'^2 \beta_3'^2}{1 - k'^2 \beta_1'^4} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \cos 2\gamma (a - a_0) & 1 & 1 \\ 0 & \cos 2\gamma (b - b_0) & 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (9).$$

Die Leitern der Veränderlichen  $z$ , bzw.  $a$  und  $b$ , sind geradlinig, wie vorausgesetzt und aus der Matrix zu ersehen ist (3. und 4. Zeile von (9)). Die Leitern für die Veränderliche  $w$ , bzw.  $p$  und  $q$ , liegen auf Kegelschnitten (1. und 2. Zeile von (9)). Verändert man den Wert des Moduls  $k$ , so erhält man, wie bereits erwähnt, ein ganzes Kegelschnittbüschel.

## Die Punktdarstellung einer Matrix nach Konrad Friedrich und sein Gitterdeterminanten-Verfahren; Anwendungen und Methodisches

Von Werner Jenne in Frankfurt am Main

Es ist der Zweck der folgenden Zeilen

1. eine Analogie hervorzuheben, die meiner Ansicht nach besteht zwischen dem Horner'schen Verfahren zur Berechnung des numerischen Wertes eines Polynoms einer Veränderlichen einerseits und dem Gitterdeterminanten-Verfahren von Konrad Friedrich (1)(2) andererseits;
2. die von K. Friedrich 1930 angegebene „Punktdarstellung eines Normalsystems“ (3) auf den allgemeinsten Fall der Punktdarstellung einer Matrix oder einer Determinante auszudehnen, der denkbar ist;
3. die methodischen Eigenschaften dieser Darstellung kurz zu schildern;
4. die Anwendungen und Anwendungsmöglichkeiten in Theorie und Praxis anzudeuten.

### 1. Analogie Horner-Friedrich

Bekanntlich schuf Horner sein so überaus einfaches Verfahren zur Berechnung des numerischen Wertes eines beliebigen Polynoms einer Veränderlichen deshalb, weil bei der sich direkt an die übliche Schreibweise der Polynome anschließenden Berechnungsart die numerische Berechnung der auftretenden hohen Potenzen der Veränderlichen zu mühsam ist.

Ähnlich liegt aber der Fall, wenn der numerische Wert einer Determinante berechnet werden soll, bei der die Anzahl der Zeilen gleich 5 oder größer ist. Es gibt bekanntlich zwei immer anwendbare klassische Verfahren zur Berechnung des numerischen Wertes einer Determinante: erstens durch Summation zahlreicher Produkte aus  $n$  Faktoren ( $n$  = Reihenanzahl), zweitens Entwicklung nach den Elementen einer beliebigen Zeile oder Spalte. Beide Verfahren werden mit wachsender Zeilenanzahl der zu berechnenden Determinante rasch unübersichtlich und mühsam in der Handhabung. Das Friedrich'sche Gitterdeterminanten-Verfahren vermeidet verschiedene Nachteile, die den beiden klassischen Berechnungs-Verfahren anhaften, durch Einführung einer bezifferten ebenen Abbildung der Determinante, anhand derer nach einfachen Vorschriften gerechnet wird, die Friedrich aus der Theorie der Determinanten abgeleitet hat, veröffentlicht zuerst in (1), später ausführlicher in (2). Allerdings zeigt sich das Gitterdeterminanten-Verfahren im allgemeinen nur dann den klassischen Verfahren überlegen, wenn



die zu berechnende Determinante zahlreiche verschwindende Elemente aufweist (Gitterdeterminante). Ich möchte an dieser Stelle der heute merkwürdigerweise häufig anzutreffenden Ansicht gegenübertreten, daß nur solche Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme von Interesse seien, die bei jedem Gleichungssystem anwendbar sind, ohne Rücksicht auf besondere Eigenschaften der Matrix des Systems. Ganz im Gegenteil, neben diesen etwa 20 Verfahren brauchen wir auch solche, welche die Möglichkeit bieten, besondere Eigenschaften der Matrix des Systems zu berücksichtigen. Unter diesen ist wohl das **Friedrichsche Gitterdeterminanten-Verfahren** ohne Zweifel das allgemeinste, welches bisher bekannt wurde.

## 2. Die Punktdarstellung einer Matrix oder einer Determinante

Abbildung einer beliebigen Matrix in der Zeichenebene nach folgender Vorschrift: die Elemente der Hauptdiagonale werden bezifferten Punkten der Ebene zugeordnet, die gemischten Elemente dagegen ebenfalls bezifferten Kurvenstücken, die bei beliebigem Verlauf, beliebiger Länge und mit beliebiger Krümmung das zugehörige Punktepaar verbinden. Meist können hierfür Geradenstücke gewählt werden. Verschwindende Elemente: Kein Abbild. Unsymmetrische Matrizen oder Determinanten: Doppelbezeichnung der Kurvenstücke, je nach dem Durchlaufungssinn. Nichtquadratische Matrizen: freie Kurvenstücke. Symmetrische Matrizen oder Determinanten: Durchlaufungssinn der Kurvenstücke kann unberücksichtigt bleiben (Fortfall der Doppelbezeichnung). Konstanter Wert aller von Null verschiedenen gemischten Elemente: Ersparnis der Kurvenbezeichnung (häufiger Fall auf verschiedenen Anwendungsgebieten). Die Elemente der Hauptdiagonale haben einen festen Wert: Ersparnis der Punkt-

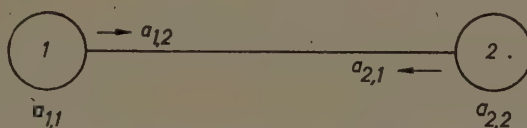


Bild 1. Ausschnitt aus der allgemeinsten Punktdarstellung eines linearen Gleichungssystems

bezeichnung, daher nun rein geometrische Abbildung, frei von jeder Metrik, an kein Koordinatensystem gebunden, Krümmung der Kurvenstücke gleichgültig, entscheidend sind nur Lagebeziehungen und Symmetrieeigenschaften der Bildfiguren. Zum Beziffern der Bilder können auch Matrizen, Tensoren, Gebilde der logistischen Mathematik und dergleichen verwendet werden. Vgl. Bild 1.

## 3. Die methodischen Eigenschaften der Punktdarstellung

In methodischer Hinsicht besteht wohl am meisten Verwandtschaft zu den bezifferten Kräfteplänen, die bei der Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke Verwendung finden, z. B. zum **Cremona'schen Kräfteplan**.

Es wäre noch festzustellen, wie weit die naturgemäß auftretenden topologischen Probleme aus der Theorie der Gelenkwerke (Graphen) bekannt sind oder nicht.

## 4. Anwendungen und Anwendungsmöglichkeiten

a) **Geodätische Ausgleichungsrechnung**. Ohne Zweifel lag bei den Anwendungen das Hauptgewicht bisher auf dem Gebiete der geodätischen Ausgleichungsrechnung. Und hier wiederum bieten die, durch Arbeiten von mir nicht unwesentlich weitergetriebenen **Friedrichschen Verfahren** da besondere Vorteile gegenüber den klassischen Methoden, wo das **Boltzsche Entwicklungs-Verfahren** oder sein **Substitutions-Verfahren** zur Anwendung gelangen. Dies ist überwiegend der Fall in den Ländern deutschen, italienischen und französischen Sprachgebiets; dementsprechend sehen wir in diesen Ländern eine durch zahlreiche Abhandlungen belegte lebhaft Beschäftigung mit den **Friedrichschen Verfahren**, vgl. die Literaturübersicht. Ein besonders tiefes Erfassen und Weiterführen der Ideen von **Boltz**, **Friedrich** und der meinigen ist in Frankreich festzustellen, und zwar speziell durch die Arbeiten von **M. Dupuy** (4) (5). In der letzterschienenen Abhandlung (5) beschäftigt sich **M. Dupuy** eingehend mit den von **H. Boltz** (6) und mir (7) veröffentlichten „Kehrmatrizen-Tafeln“ — ein, in französischer Sprache, von ihm geprägter Ausdruck — und macht interessante und zweifellos sehr brauchbare Vorschläge für die weitere Ausgestaltung dieses neuartigen Rechenhilfsmittels. Eine Stellungnahme von mir zu der genannten Abhandlung von **M. Dupuy** ist für das Septemberheft 1954 des „Bulletin Géodésique“, des Organs der **Association Internationale de Géodésie**, Erscheinungsort Paris, zum Abdruck in englischer Sprache <sup>1)</sup> angenommen. Ferner habe ich einen Arbeitsvorschlag ausgearbeitet zur schnellen und

<sup>1)</sup> Weil einerseits im englischen Sprachgebiet die **Friedrichschen** Arbeiten noch wenig bekannt zu sein scheinen, andererseits dem englischen Mathematiker **J. J. Sylvester** grundlegende Arbeiten über **Kontinuanten** zu verdanken sind.



rationellen Durchführung der Berechnung von geodätischen Kehrmatrizen-Tafeln mit Hilfe von Lochkarten; dieser Vorschlag wird, wie ich hoffe, in einer deutschen geodätischen Zeitschrift erscheinen können.

b) **Andere Gebiete.** In seiner grundlegenden Arbeit (3), erschienen 1930, nennt Friedrich bereits als Anwendungsgebiete seiner Methoden: Technische Mechanik — Dimensionierung der statisch vielfach unbestimmten Tragwerke, und Elektrotechnik — Berechnung elektrischer Leitungsnetze.

Hierzu erwähnt er, daß sich im letzteren Falle die Punktdarstellung meist bereits mit dem Netzbilde decke. Verschiedene Beispiele für diese Anwendungen führt Friedrich a. a. O. an und durch.

Als weitere Anwendungsgebiete, die sich bis auf III. erst nach dem Tode von K. Friedrich (1944) ergeben haben, sind zu nennen:

- I. Reduzibilitäts-Eigenschaften spezieller, von Nörlund definierter Tschebyscheffscher Polynome, wobei insbesondere meine Ergebnisse bezüglich der Summenspaltung und Differenzenspaltung bei symmetrischen Punktdarstellungen vorteilhaft zur Anwendung gelangen (1);
- II. Säkulargleichung und Eigenwertprobleme (Arbeiten im Institut für Praktische Mathematik, Darmstadt);
- III. Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen — Poisson'sche Gleichung, Laplace'sche Gleichung, vgl. z. B. (5);
- IV. Gewisse Probleme der Theoretischen Chemie.

### Schlußbemerkung

Daß Punktdarstellung und Gitterdeterminanten-Verfahren von K. Friedrich wertvolle Hilfsmittel darstellen bei der Inversion von Matrizen, speziell von Gittermatrizen, ergibt sich aus der angezogenen Literatur und den obigen Ausführungen. Für weniger wahrscheinlich halte ich es, daß die Punktdarstellung auch bei der Multiplikation von Matrizen Vorteile zu bieten vermag; immerhin wäre wohl auch diese Frage zu prüfen.

### Literatur

- [1] W. Jenne: Zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. Astron. Nachr., Bd. 278; 74—95, 1949;
- [2] K. Friedrich u. W. Jenne: Geometrisch-anschauliche Auflösung linearer mit Nullkoeffizienten ausgestatteter Gleichungssysteme. Dt. Akad. d. Wiss. z. Berlin, Veröff. Geodät. Inst. Potsdam Nr. 5, Berlin 1951;
- [3] K. Friedrich: Beiträge zur direkten und indirekten Auflösung der Normalgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der geodätischen Netzausgleichung. Stuttgart 1930. (Durch Erläut. u. Ergänzungen verm. S.-Abdr. a. Z. f. Vermess.-Wes. 1930);
- [4] M. Dupuy: Les études du Professeur Marcantoni sur les applications du calcul matriciel à la compensation des grands réseaux. Bulletin Géodésique 1948, 241—250;
- [5] M. Dupuy: Remarques sur la valeur des tables de Boltz Jenne. À propos d'un récent article de M. Wolf. Bull. Géod. 1953, 269;
- [6] H. Boltz: Entwicklungs-Verfahren zum Ausgleichen geodätischer Netze nach der Methode der kleinsten Quadrate. Veröff. Pr. Geodät. Inst., Neue Folge Nr. 90. Berlin 1923;
- [7] W. Jenne: Kettenbruchformeln und Korrelatentabellen für trigonometrische Netze, mit einigen Beiträgen zur Auflösung beliebiger Systeme einfacher linearer Gleichungen mit Hilfe von Kettenbrüchen. Veröff. Pr. Geod. Inst., N. F. Nr. 107. Potsdam 1937;
- [8] A. Marcantoni: Fondamenti di moderni metodi di calcolo per la compensazione rigorosa delle grandi retigeodetiche. L'Universo, Riv. mens. dell' Ist. Geogr. Milit. 1944, Febr.—Mai;
- [9] G. Boaga: Procedimento automatico per la compensazione rigorosa delle reti trigonometriche. Boll. d. Geod. e Sc. affini. Firenze 1951;
- [10] R. Marchant: Les méthodes de Friedrich-Jenne et de Boltz pour la compensation des réseaux géodésiques comportant jusqu'à quelques centaines d'équations de conditions. Inst. Géogr. Mil. Brüssel 1953;
- [11] M. Kneissl: Arb. d. Bodenseekonferenz I. Allg. Überbl. üb. d. Arbeiten v. 1926—1952. Veröff. Nr. 8/I, Reihe Bd. Dt. Geod. Komm. München 1953.

## Die Kernstrahlen in der Darstellenden Geometrie

Von H. Lenz in München

Die Aufgabe, aus zwei gegebenen linearen Bildern eines Gegenstandes ein drittes zu konstruieren, läßt sich nach G. Hauck mit Hilfe der Kernstrahlen lösen. Die Übertragung von Strahlen in projektiven Büscheln, auf die es dabei ankommt, kann nach S. Finsterwalder mit dem Papierstreifen ausgeführt werden; ebenso die u. U. vorher nötige Auffindung dreier Paare entsprechender Kernstrahlen zu je zweien der drei Bilder.

1. **Beispiel:** In Grund- und Aufriß sind Gegenstand und Projektionsrichtung  $s$  gegeben. Gesucht ist der Riß auf eine zu  $s$  senkrechte Ebene. Nach der Nyström'schen



Formel  $\cos \xi = \cos \varphi \sin \psi$  (Bezeichnungen s. Bild 1) findet man den Winkel  $\xi$  und damit die Kernstrahlen zu Aufriß und drittem Riß wie folgt:

Fälle von einem Punkt  $Z$  der  $z''$ -Achse das Lot  $ZS$  auf  $s''$ ! Trage  $O''S = O'T$  auf  $s'$  ab! Zeichne den Kreis  $K$  um  $O''$  mit dem Abstand  $(T, y')$  als Radius! Die Tangente  $t$  von  $Z$  aus an  $K$  schließt dann mit der  $y''$ -Achse den Winkel  $\xi$  ein. Die  $\bar{x}$ -Achse ist also das Lot zu  $t$  durch  $\bar{O}$ . Für beliebige Punkte  $P$  ist dann Abstand  $(P'', s'') =$  Abstand  $(\bar{P}, \bar{x})$  und Abstand  $(P', s') =$  Abstand  $(\bar{P}, \bar{z})$ . Zur Abstandsmessung und -übertragung verwende man, soweit möglich, den Stechzirkel.

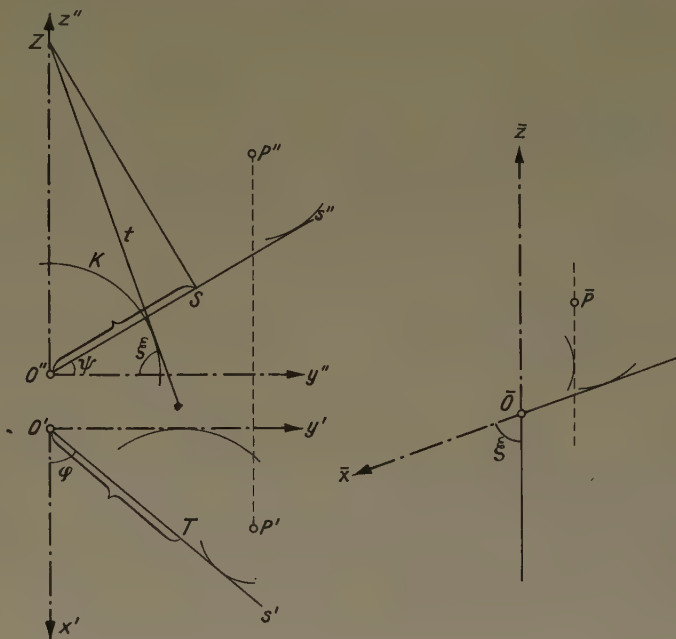


Bild 1

2. Beispiel (allgemeine Axonometrie): Gegeben sind Grund- und Aufriß, sowie die Achsenbilder des Schrägbildes mit Einheitspunkten  $A, B, C$ . Man findet den Grundriß  $s'$  (und analog den Aufriß  $s''$ ) mit dem Papierstreifen (in Bild 2 nur für  $s'$  eingezeichnet) auf Grund der Doppelverhältniseigenschaft

$$(x' u' y' s') = (\bar{x} \bar{u} \bar{y} \bar{z})$$

bzw.

$$[(y' v' z' s'') = (\bar{y} \bar{v} \bar{z} \bar{x})].$$

Die Übertragung der Kernstrahlen durch gegebene Punkte  $P$  erfolgt dann etwa mit Hilfe geeigneter schräg eingezeichneter Skalen  $m, n$ . [In Bild 2 ist  $A'Q =$  Abstand  $(\bar{A}, \bar{z})$  und  $C'R =$  Abstand  $(\bar{C}, \bar{x})$ ]

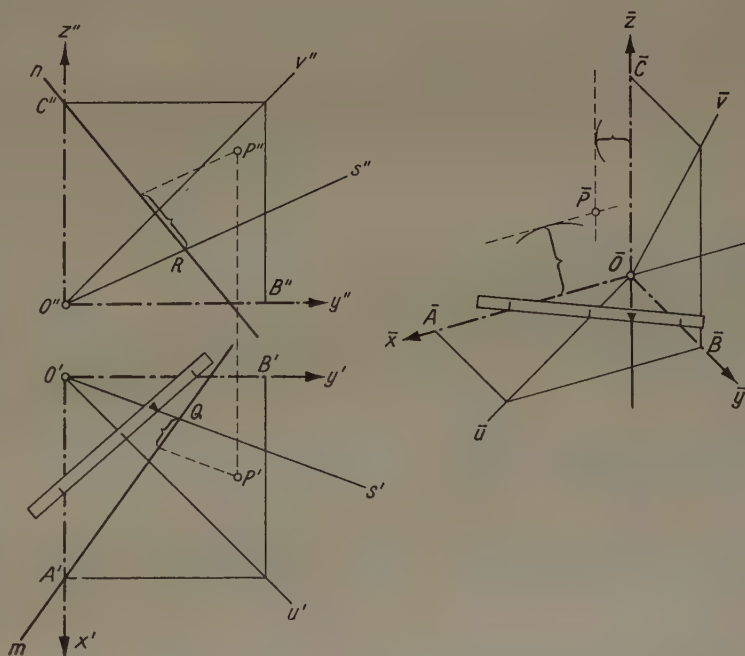


Bild 2

3. Beispiel: Gegeben sind Grund- und Aufriß. Gesucht ist ein perspektivisches Bild, in dem der Einheitswürfel vorgegeben ist. Die Kernstrahlen im dritten Bild gehen durch die Fluchtpunkte der  $z$ -Achse bzw. der  $x$ -Achse. Man kann mit dem Papierstreifen je drei dieser Kernstrahlen (etwa durch drei Ecken des Einheitsquadrats der  $x$ - $y$ - bzw.  $y$ - $z$ -Ebene) in den Grund- bzw. Aufriß übertragen und dann weitere Kernstrahlen, die durch gegebene Punkte gehen, aus den gegebenen Rissen entnehmen und in das perspektivische Bild übertragen.



## Bemerkungen zur günstigsten projektiven Abbildung von Skalen und Nomogrammen

Von *Rudolf Ludwig* in Braunschweig

Eine im Bereich  $x_1 \leq x \leq x_2$  stetige, eindeutige und monoton zunehmende Funktion  $F(x)$  läßt sich durch

$$f(x) = \frac{F(x) - F(x_1)}{F(x_2) - F(x_1)} \quad \dots \quad (1)$$

als geradlinige Funktionsleiter der Länge 1 darstellen. Durch eine projektive Abbildung

$$\bar{x} = \mathfrak{A}x \quad \dots \quad (2)$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{f}(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = (a_{ik}), \quad (i, k = 1, 2), \quad A \neq 0$$

und mit der speziellen Matrix

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ \tau - 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad (3)$$

erreicht man, daß die Randpunkte der Skala festbleiben und daß für  $\tau > 0$  der Durchlaufungsinn der Skala erhalten bleibt.

Die allgemeine Projektivität (2) mit 3 wesentlichen Konstanten läßt sich zerspalten in eine Affinität und die spezielle Projektivität (3). Zwischen  $\tau$  und den  $a_{ik}$  besteht dann die Beziehung

$$\tau = 1 + \frac{a_{21}}{a_{22}} \quad \dots \quad (4).$$

Der Teilstrichabstand ist für kleine Schrittweiten proportional  $f'(x)$ . Daher wird als Teilstrichkennzahl  $T$  definiert.

$$T[f(x)] = f'(x) \quad \dots \quad (5).$$

Für die durch (3) transformierte Skala ist

$$T[\bar{f}(x)] = \bar{f}'(x) = \frac{\tau f'(x)}{[1 + (\tau - 1)f(x)]^2} \quad \dots \quad (6).$$

$T$  als Funktion von  $x$  und  $\tau$  ist deutbar als Fläche über dem Bereich  $\mathfrak{B} [x_1 \leq x \leq x_2, 0 < \tau < \infty]$ , sie hat folgende Eigenschaften:

a) Das Produkt der Teilstrichabstände an den Skalenenden ist unabhängig vom Verzerrungsparameter  $\tau$ :

$$T[\bar{f}(x_1)] \cdot T[\bar{f}(x_2)] = f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \text{const} \quad \dots \quad (7).$$

b)  $T(x, \tau)$  hat in  $\mathfrak{B}$  stets mindestens eine stationäre Stelle  $x_0, \tau_0$ . Aus den beiden Bedingungen  $\partial T / \partial x = \partial T / \partial \tau = 0$  folgt nach Elimination von  $\tau$

$$f'' = f'^2 \frac{1 - 2f}{f(1 - f)} \quad \dots \quad (8)$$

und

$$\tau_0 = \frac{1}{f(x_0)} - 1 \quad \dots \quad (9).$$

Denkt man sich beide Seiten von (8) über  $f(x)$  aufgetragen, so sieht man leicht, daß unter den angegebenen Bedingungen beide Kurven sich innerhalb  $\mathfrak{B}$  wenigstens einmal schneiden müssen.

Die Entscheidung über die Art der stationären Stelle liefern die zweiten Ableitungen und die Diskriminante. Man rechnet aus:

$$T_{xx}(x_0, \tau_0) = \frac{2f'f''' - 3f''^2}{8f'f'(1-f)}, \quad T_{\tau\tau}(x_0, \tau_0) = -\frac{ff'}{8(1-f)^3} < 0, \quad T_{x\tau}(x_0, \tau_0) = -\frac{f'^2}{8f(1-f)^3} < 0, \\ D(x_0, \tau_0) = T_{xx}T_{\tau\tau} - T_{x\tau}^2 = -\frac{1}{64(1-f)^4} \left\{ (2f'f''' - 3f''^2) + \frac{f'^4}{f^2(1-f)^2} \right\} \quad (11).$$



Daraus folgt für die Stelle  $x_0, \tau_0$ :

a)  $2 f' f''' - 3 f''^2 > 0, \quad D < 0;$

b)  $2 f' f''' - 3 f''^2 < 0 \quad \text{und} \quad |2 f' f''' - 3 f''^2| < \frac{f'^4}{f^2(1-f)^2}, \quad D < 0;$

oder  $|2 f' f''' - 3 f''^2| > \frac{f'^4}{f^2(1-f)^2}, \quad D > 0.$

Ist  $D < 0$ , so hat die Fläche einen Sattelpunkt. Des letzte Fall würde ein Maximum bedeuten. Da  $T$  am linken Rand proportional  $\tau$ , am rechten Rand aber umgekehrt proportional  $\tau$  ist, sieht man geometrisch leicht ein, daß es wenigstens einen Sattelpunkt geben muß.

Die Funktionsleiter, die dem Parameterwert  $\tau_0$  des Sattelpunktes entspricht, soll als die günstigste Abbildung der Skala betrachtet werden. Für  $\tau$ -Werte nahe Null und für sehr große Werte von  $\tau$  wird nach (7) die Schwankung von  $T$  beliebig groß. Bei konstant gehaltenem  $\tau_0$  hat  $T$  bei  $x_0$  ein Maximum oder Minimum; bei konstant gehaltenem  $x_0$  hat aber  $T$  stets ein Maximum bei  $\tau_0$ , d. h. der Teilstrichabstand ist dort größer als bei anderen Verzerrungen.

Ein Fluchtliniennomogramm mit den drei geradlinigen Skalen

$$r_i = f_i(t_i) b_i + c_i \quad \text{mit den Vektoren} \quad b_i = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_i = \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (12),$$

wird durch die ebene Kollineation

$$\bar{x} = \mathcal{A} x \quad \text{mit} \quad \mathcal{A} = (a_{ik}), \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (13),$$

transformiert. Durch Parallelprojektion einer geraden Skala auf eine Koordinatenachse erhält man eine ähnliche Skala, d. h. aber, daß die Teilstrichkennzahl dabei erhalten bleibt. Die zweireihige Matrix  $\mathcal{A}_x^i$  für die Projektivität zwischen der Skala  $r_i$  (12) und der Projektion des kollinearen Bildes z. B. auf die  $x$ -Achse ist

$$\mathcal{A}_x^i = \begin{pmatrix} a_{11} b_{i1} + a_{12} b_{i2}, & a_{11} c_{i1} + a_{12} c_{i2} + a_{13} \\ a_{31} b_{i1} + a_{32} b_{i2}, & a_{31} c_{i1} + a_{32} c_{i2} + a_{33} \end{pmatrix} \quad (14).$$

Der zu dieser Projektivität gehörende Verzerrungsparameter  $\tau_i$  ist nach (4):

$$\tau_i = 1 + \frac{a_{31} b_{i1} + a_{32} b_{i2}}{a_{31} c_{i1} + a_{32} c_{i2} + a_{33}} \quad (15)$$

oder auch

$$[(\tau_i - 1) c_{i1} - b_{i1}] a_{31} + [(\tau_i - 1) c_{i2} - b_{i2}] a_{32} + (\tau_i - 1) a_{33} = 0 \quad (16).$$

Gibt man also z. B. nach (9) die günstigsten  $\tau_i$  für zwei Skalen vor, so kann man aus zwei Gln. (16) das Verhältnis  $a_{31} : a_{32} : a_{33}$  berechnen. Der Verzerrungsparameter der dritten Skala ist dadurch bestimmt, denn aus drei Gln. (16) folgt:

$$\begin{vmatrix} (\tau_1 - 1) c_{11} - b_{11} & (\tau_1 - 1) c_{12} - b_{12} & \tau_1 - 1 \\ (\tau_2 - 1) c_{21} - b_{21} & (\tau_2 - 1) c_{22} - b_{22} & \tau_2 - 1 \\ (\tau_3 - 1) c_{31} - b_{31} & (\tau_3 - 1) c_{32} - b_{32} & \tau_3 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (17).$$

Eine Kollineation zur günstigsten Abbildung eines Nomogrammes mit geradlinigen Leitern kann man daher bestimmen durch Original und Bild von drei Punkten und durch zwei optimale Verzerrungsparameter.

## Verallgemeinerte Multipolfelder

Von R. Lüst, A. Schlüter und E. Trefftz (vorgetragen von R. Lüst)

Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen

Zur Untersuchung von zylindersymmetrischen Vektordifferentialgleichungen, insbesondere um sie in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu überführen, die nur noch vom Mittelpunkt Abstand  $r$  abhängen, werden skalare und vektorielle verallgemeinerte Multipolfelder definiert. Denn häufig ist es bei solchen Problemen sehr unzweckmäßig, ein spezielles Koordinatensystem einzuführen und die Vektordifferentialgleichungen in Komponenten aufzuspalten,



da dabei leicht die Übersichtlichkeit über die Bedeutung und Größe der einzelnen Glieder, sowie die geltenden Identitäten — z. B.  $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$  oder  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$  — verlorengeht. Insbesondere wird durch die Einführung spezieller Koordinaten die exakte oder näherungsweise Überführung der partiellen Differentialgleichungen in ein endliches System gewöhnlicher Differentialgleichungen oft praktisch undurchführbar.

Zu Problemen dieser Art wird man z. B. geführt, wenn man die Rotation kosmischer Gas-massen unter dem Einfluß turbulenter Reibung und bei Gegenwart von Magnetfeldern untersuchen will.

Jedes beliebige zylindersymmetrische Vektorfeld läßt sich zerlegen in ein Feld  $\mathfrak{D} + \mathfrak{P}$ , das in den Meridianebenen verläuft, und in ein Feld  $\mathfrak{I}$ , dessen Feldlinien parallel zur Äquatorebene verlaufen. Dabei bedeutet  $\mathfrak{D}$  den rotationsfreien und  $\mathfrak{P}$  den divergenzfreien Anteil in der Meridianebene, während  $\mathfrak{I}$  stets divergenzfrei ist. Diese Vektorfelder  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{I}$  werden nun in folgender Weise entwickelt.

An Stelle des Potentials der Punktladung  $1/r$ , aus dem sich die gewöhnlichen Multipolfelder herleiten lassen, wird eine beliebige kugelsymmetrische „Stammfunktion“  $g(r)$  eingeführt. Es sei nun ein skalares Potential nullter Ordnung definiert durch die Gleichung:

$$S_0\{g\} = g(r).$$

Die höheren skalaren Potentiale der verallgemeinerten Multipolfelder werden analog zu denen der gewöhnlichen Multipolfelder definiert:

$$S_{n+1}\{g\} = (m \operatorname{grad} S_n\{g\}); \quad n = 0, 1, \dots$$

Hierin ist  $m$  der Einheitsvektor in Richtung der Symmetrieachse. Durch Bildung des Gradienten von  $S_n\{g\}$  wird dann ein „Quellfeld“  $\mathfrak{D}_n\{g\}$  definiert:

$$\mathfrak{D}_n\{g\} = \operatorname{grad} S_n\{g\}; \quad n = 0, 1, \dots$$

Jede Feldlinie dieser Felder liegt ganz in einer Meridianebene und ein solches Feld ist natürlich wirbelfrei. Aus diesem Quellfeld wird ein „toroidales“ Vektorfeld  $\mathfrak{I}_n\{g\}$  gebildet:

$$\mathfrak{I}_n\{g\} = [\mathfrak{D}_{n-1}\{g\} m]; \quad n = 1, 2, \dots$$

Die Feldlinien dieser Felder verlaufen parallel zur Äquatorebene und außerdem ist ein solches Feld quellenfrei, wie durch direktes Ausdifferenzieren leicht bestätigt werden kann. Durch Rotationsbildung gelangt man weiter zu einem „poloidalen“ Vektorfeld:

$$\mathfrak{P}_n\{g\} = \operatorname{rot} \mathfrak{I}_n\{g\}; \quad n = 1, 2, \dots$$

das quellenfrei ist und wie  $\mathfrak{D}_n\{g\}$  ganz in der Meridianebene liegt.

Für die so eingeführten Felder gelten folgende einfachen Differentiationsregeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{D}_n\{g\} &= S_n\{\Delta g\}; & \operatorname{rot} \mathfrak{P}_n\{g\} &= \mathfrak{I}_n\{-\Delta g\}, \\ \Delta S_n\{g\} &= S_n\{\Delta g\}; & \Delta \mathfrak{D}_n\{g\} &= \mathfrak{D}_n\{\Delta g\}; \\ \Delta \mathfrak{I}_n\{g\} &= \mathfrak{I}_n\{\Delta g\}; & \Delta \mathfrak{P}_n\{g\} &= \mathfrak{P}_n\{\Delta g\}. \end{aligned}$$

Der  $\Delta$ -Operator ( $\Delta a = \operatorname{grad} \operatorname{div} a - \operatorname{rot} \operatorname{rot} a$ ) kann also bei allen Multipolfeldern direkt auf die Stammfunktion abgewälzt werden.

Für die skalaren Potentiale  $S_n\{g\}$  kann man nun Reihenentwicklungen nach  $(m r) = z$  bekommen, in denen nur die Ableitungen der Stammfunktionen  $g(r)$  auftreten, (die Symmetrieachse sei die  $z$ -Achse) und weiterhin lassen sich mit Hilfe dieser Reihenentwicklungen auch die Vektorfelder  $\mathfrak{D}_n$ ,  $\mathfrak{I}_n$  und  $\mathfrak{P}_n$  darstellen. Außerdem sind Reihenentwicklungen für die Produkte zweier skalarer Potentiale sowie auch für die Produkte zweier Felder möglich. Schließlich kann man auch Reihenentwicklungen für eine vorgegebene zylindersymmetrische Funktion  $f(r, z)$  bzw. für ein vorgegebenes zylindersymmetrisches Vektorfeld angeben<sup>1)</sup>.

Als Beispiel zur Anwendung der verallgemeinerten Multipolfelder sei auf eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen verwiesen, bei der die Stromlinien  $\mathfrak{v}$  überall parallel zu den Wirbellinien  $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$  verlaufen<sup>2)</sup>. Dieses Problem hat seine Analogie bei der Untersuchung kraftfreier Magnetfelder, bei denen das Magnetfeld überall zum Strom parallel ist<sup>3)</sup>. In der Hydrodynamik magnetisierter Materie sind gerade solche Magnetfelder von Bedeutung.

<sup>1)</sup> Siehe hierzu R. Lüst, A. Schlüter und E. Trefftz, J. of Rat. Mech. and Analys. 2, 485 (1953).

<sup>2)</sup> R. Lüst und A. Schlüter, Z. angew. Math. Mech. (im Druck).

<sup>3)</sup> R. Lüst und A. Schlüter, Z. f. Astrophys. 34, 263 (1954).



## Zur Interpolationstheorie der reellen Funktionen

Von W. Quade in Hannover

Die *L a g r a n g e* sche Interpolationsformel und damit auch die *N e w t o n* sche weist zwei Defekte auf, die den Wert dieser Formel beeinträchtigen. Zum einen strebt der *L a g r a n g e* sche Interpolationsausdruck bei zunehmender Ordinatenzahl im allgemeinen nicht gegen die zu interpolierende Funktion, zum anderen bewirkt eine geringe Änderung einer der gegebenen Ordinaten eine unverhältnismäßig große Änderung der zwischen den gegebenen liegenden Ordinaten.

Es wird ein Interpolationsverfahren vorgeschlagen, das von den beiden soeben erwähnten Mängeln frei ist. Das Verfahren benutzt Ausdrücke, die sich additiv aus einem Polynom und einem endlichen trigonometrischen Ausdruck zusammensetzen. Es werden Fehlerabschätzungen angegeben, die erkennen lassen, in welcher Weise der Interpolationsausdruck gegen die zu interpolierende Funktion strebt.

Eine ausführliche Darstellung wird demnächst in dieser Zeitschrift erscheinen.

## Die Orthogonalmethode zur Lösung von halbhomogenen partiellen Randwertaufgaben \*)

Von *Sven T. A. Ödman* in Djursholm, Schweden

Es sei ein halbhomogenes, lineares Randwertproblem 2  $m$ -ter Ordnung

$$L(w) = f(x, y); \quad U_i(w) = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, 4m)$$

gegeben. Gesucht ist eine eingliedrige Näherungslösung  $\psi \equiv c \cdot u(x; \lambda) \cdot v(y; \mu)$ , die die Randbedingungen wenigstens angenähert erfüllt und die drei unbekannte Parameter  $c$ ,  $\lambda$  und  $\mu$  enthält.

Mit einem Ansatz  $\psi = X(x) \cdot Y(y)$  und unter Vernachlässigung des Restgliedes wird die partielle Differentialgleichung mit zwei gewöhnlichen ergänzt und läßt sich dann symbolisch in entweder der Form  $L_1(X) = f_1(x)$  oder der Form  $L_2(Y) = f_2(y)$  schreiben. Die Koeffizienten sind dabei veränderlich, d. h. abhängig von  $y$  bzw.  $x$ .

Um die drei Gleichungen gleichzeitig zu lösen wird  $X = c_1 \cdot u(x)$  und  $Y = c_2 \cdot v(y)$  gesetzt, wo  $c_1 \cdot c_2 = c$ . Gemäß der Fehlerproduktmethode, die eine Variante der Fehlerquadratmethode ist, wird verlangt, daß das mittlere Fehlerprodukt der zwei Fehlerfunktionen jeder Gleichung möglichst klein wird. Man setzt also

$$\left. \begin{aligned} \iint [L(cuv) - f] (cuv - w) dx dy &= \min \\ \int [L_1(X) - f_1] (c_1 u - X) dx &= \min \\ \int [L_2(Y) - f_2] (c_2 v - Y) dy &= \min \end{aligned} \right\}$$

Wenn sämtliche, zugehörige Differentialgleichungen selbstadjungiert sind, dann läßt sich zeigen, daß die drei Minimalforderungen in folgender Form umgeschrieben werden können

$$\left. \begin{aligned} \iint [L(cuv) - 2f] cuv dx dy &= \min \\ \int [L_1(c_1 u) - 2f_1] c_1 u dx &= \min \\ \int [L_2(c_2 v) - 2f_2] c_2 v dy &= \min \end{aligned} \right\}$$

Nach einer Ableitung mit Bezug auf die respektiven Konstanten und nach Wiedereinführung der ursprünglichen Bezeichnungen ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \iint [L(\psi) - f] uv dx dy &= 0 \\ \int [L(\psi) - f] u dx &= 0 \\ \int [L(\psi) - f] v dy &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

das als 1. Orthogonalformel bezeichnet wird.

Nach der nahe verwandten *R i t z* schen Methode wird bekanntlich ein Minimum eines einzigen Integrales verlangt und dies mit Bezug auf jede ausführbare Variation des Integrales. Hier ist dagegen gefordert worden, daß drei Integrale ihren Minimalwert erreichen, und dies für eine Variation nur mit Bezug auf die amplitudenbestimmenden Konstanten — dieses Verhältnis führt zu einer erheblichen Verminderung der numerischen Rechenarbeit. — Die Methoden können dasselbe Resultat ergeben wenn erstens alle drei Differentialgleichungen selbstadjungiert sind, und

\*) Die Methode ist in folgender Arbeit eingehender beschrieben worden und mit Beispielen versehen: *S. T. A. Ödman*, Studies of Boundary Value Problems, Part I: Minimum Methods for Solving Semi-Homogeneous Boundary Value Problems, Svenska Forskningsinstitutet för Cement och Betong, Handlingar Nr. 20, Stockholm 1953.

zweitens ein und derselbe Ansatz angewandt wird. Diese Bedingungen sind notwendig. Ob sie auch hinreichend sind bleibt noch übrig zu zeigen.

Wenn die beiden letzten Integrale der 1. Orthogonalformel mit Bezug auf  $y$  bzw.  $x$  integriert werden, kann ein beliebiger Ansatz angewandt werden. Man erhält dann eine 2. Orthogonalformel

$$\iint [L(\psi) - f] \cdot \{u v; u; v\} dx dy = 0 \dots \dots \dots (2)$$

deren Anwendung nur ausnahmsweise eine Lösung ergeben kann, die einem Minimum entspricht.

## Nomogramme zur Ermittlung der magnetischen Feldstärke in stromdurchflossenen dünnen Zylinderspulen

Von *Elénore Schwarz* in Berlin

Es werden Nomogramme beschrieben, die die Radial- und Axialkomponenten der magnetischen Feldstärke in stromdurchflossenen dünnen Zylinderspulen in der gleichen Art zu ermitteln gestatten wie das 1952 von A. Weigand angegebene Verfahren. Dieses erlaubt im Gegensatz zu älteren Methoden die Bestimmung der Feldstärkekomponenten nicht nur in Punkten der Achse sondern in allen Punkten des Feldes. Das Verfahren führt auf die Gleichungen

$$H_r^*(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{2 JW}{\pi h} \cdot \left\{ \frac{\bar{r} C(k_1^*)}{[(1 + \bar{r})^2 + \gamma^2 (1 - \bar{z})^2]^{3/2}} - \frac{\bar{r} C(k_2^*)}{[(1 + \bar{r})^2 + \gamma^2 (1 + \bar{z})^2]^{3/2}} \right\} \dots (1),$$

$$H_z^*(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{\gamma JW}{4\pi h} \cdot \left\{ \frac{(1 - \bar{z} K(k_1^*))}{\sqrt{(1 + \bar{r})^2 + \gamma^2 (1 - \bar{z})^2}} + \frac{(1 + \bar{z}) K(k_2^*)}{\sqrt{(1 + \bar{r})^2 + \gamma^2 (1 + \bar{z})^2}} \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2\gamma} [A_0(\alpha_1^*, \beta_1^*) + A_0(\alpha_2^*, \beta_2^*)] \right\} \dots \dots \dots (2),$$

$$k_1^{*2} = \frac{4\bar{r}}{(1 + \bar{r})^2 + \gamma^2 (1 - \bar{z})^2} = \sin^2 \alpha_1^* \dots \dots \dots (3),$$

$$k_2^{*2} = \frac{4\bar{r}}{(1 + \bar{r})^2 + \gamma^2 (1 + \bar{z})^2} = \sin^2 \alpha_2^* \dots \dots \dots (4),$$

$$\sin \beta_1^* = \frac{\gamma(1 - \bar{z})}{\sqrt{(1 - \bar{r})^2 + \gamma^2 (1 - \bar{z})^2}} \dots \dots \dots (5),$$

$$\sin \beta_2^* = \frac{\gamma(1 + \bar{z})}{\sqrt{(1 - \bar{r})^2 + \gamma^2 (1 + \bar{z})^2}} \dots \dots \dots (6).$$

Dabei sind  $\gamma, \bar{r}, \bar{z}$  die unabhängigen Veränderlichen und  $H_r^*$  bzw.  $H_z^*$  die gesuchten Komponenten der magnetischen Feldstärke.  $C(k^*), K(k^*)$  sind vollständige elliptische Integrale zweiter Gattung und  $A_0(\alpha^*, \beta^*)$  elliptische Integrale dritter Gattung.

Aus den Gleichungen (1) bis (6) werden neue Zusammenhänge abgeleitet, die eine nomographische Vertafelung zulassen und auf zwei einfach zu handhabende Nomogramme führen.

Siehe Deutsche Elektrotechnik, Jhg. 8, Heft 3, 1954, S. 83—87.

## Untersuchung spezieller Funktionen der Potentialtheorie mit Hilfe der konformen Abbildung

Von *Friedemann Stallmann* in Gießen

In der Theorie der konformen Abbildungen von Kreisbogenpolygonen wird gezeigt, daß der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit reellen rationalen Koeffizienten eine Halbebene auf ein Gebiet abbildet, das von endlich vielen Kreisbögen und evtl. endlich vielen logarithmischen Windungspunkten berandet ist; ein solches Gebiet sei als Kreisbogenpolygon bezeichnet. Ist die Differentialgleichung von der Fuchs'schen Klasse, hat sie also nur Stellen der Bestimmtheit, so erhalten wir gewöhnliche Kreisbogenpolygone ohne logarithmische Windungspunkte. Kreisbogenpolygone mit logarithmischen Windungspunkten — wir wollen sie außergewöhnliche Kreisbogenpolygone nennen — gehören zu Differentialgleichungen mit Unbestimmtheitsstellen. Wie der Verfasser zeigen konnte<sup>1)</sup>, läßt sich zu einer gegebenen Differentialgleichung das zugehörige Kreisbogenpolygon durch asymptotische Integration ohne großen Rechenaufwand näherungsweise bestimmen.

<sup>1)</sup> F. Stallmann, Konf. Abb. v. Kreisbogenpolygonen I. Math. Zeitschr. 60, 187—212 (1954).



Diese Theorie kann herangezogen werden, um die Differentialgleichungen zu untersuchen, die bei der Separation der Potentialgleichung  $\Delta u = 0$  bzw. der Wellengleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  in krummlinigen Koordinaten auftreten. Danach gehört zu jeder derartigen Differentialgleichung ein Kreisbogenpolygon, und die grundlegenden Eigenschaften der Lösungen drücken sich in gestaltlichen Besonderheiten dieser Polygone aus. Insbesondere können auch die Randbedingungen für die hier auftretenden Eigenwertprobleme leicht als geometrische Bedingungen für die zugehörigen Kreisbogenpolygone formuliert werden<sup>2)</sup>. Die Diskussion der Differentialgleichungen und Lösungsfunktionen wird damit zurückgeführt auf anschaulich geometrische Betrachtungen und man gelangt zu sehr übersichtlichen Ergebnissen. Auch für numerische Untersuchungen sind diese Betrachtungen — in Verbindung mit den oben erwähnten Methoden der asymptotischen Integration — recht geeignet. Eingehendere Untersuchungen dieser Art sind vom Verfasser durchgeführt für Lamésche, Mathieusche und Sphäroidfunktionen; ihre Ergebnisse sollen demnächst veröffentlicht werden.

## Bestimmung der Eigenwerte einer elliptischen Differentialgleichung mit der Randbedingung der Periodizität (Schrödingergleichung in Metallen)

Von E. Trefftz

Gesucht sind die möglichen Energieniveaus eines Elektrons im Innern eines Metalls. Sie bestimmen sich als Eigenwerte der Differentialgleichung

$$-\frac{1}{2} \Delta \psi + V(\mathbf{r}) \psi = E \psi.$$

Dabei ist  $V(\mathbf{r})$  das effektive „Potential“ des Kristalls, in dem sich das betrachtete Elektron bewegt. Es ist eine dreifach periodische Funktion des Ortsvektors  $\mathbf{r}$ ,

$$V(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = V(\mathbf{r}) \quad \mathbf{a} \text{ „Gittervektor“}.$$

Für die „Wellenfunktion“  $\psi$  folgt daraus, daß

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = e^{i\mathbf{r}\mathbf{a}} \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{Blochsche Bedingung})^1)$$

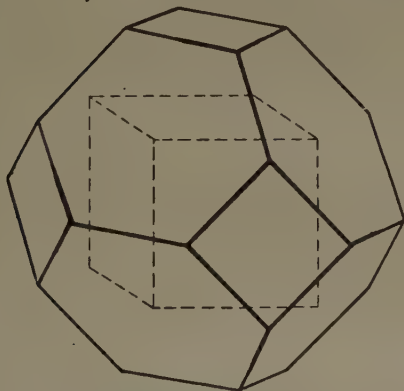


Bild 1. Elementarzelle für raumzentriertes Gitter

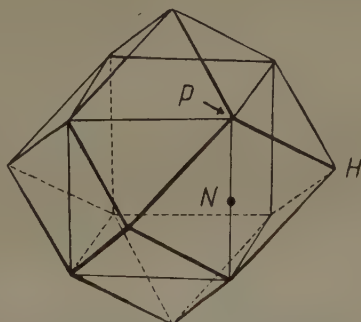


Bild 2. Elementarzelle für flächenzentriertes Gitter (Erste Brillouin zone zu Bild 1)

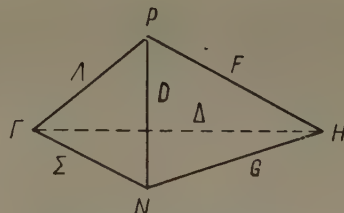


Bild 3. Elementarsektor im  $\mathbf{k}$ -Raum

Bild 1 und 2 entnommen aus Handb. d. Phys. 24,2 S. 402

ist, mit willkürlich wählbarem Wellenvektor  $\mathbf{k}$ . Die Aufgabe besteht darin, eine Beziehung zwischen  $\mathbf{k}$  und  $E$  herzustellen,  $E = E(\mathbf{k})$ , durch die dann die Verteilung der Elektronen in der Energieskala bestimmt ist. Es genügt  $\psi(\mathbf{r})$  in einer „Elementarzelle“ (Periodizitätsbereich) zu betrachten. Diese legt man zweckmäßig so, daß das Atom (es sei nur 1 Atom je Periodizitätsbereich vorhanden) im Mittelpunkt der Zelle (Koordinatenursprung) sitzt. Dann ist für kleine  $\mathbf{r}$  das Potential  $V(\mathbf{r})$  kugelsymmetrisch und wird wie  $1/|\mathbf{r}|$  unendlich. Die Berandung der Zelle ist gegeben durch Flächen, die die Verbindungslinie benachbarter Atome in der Mitte senkrecht durchschneiden. Auch in bezug auf  $\mathbf{k}$  ist  $\psi$  und  $E$  periodisch

$$E(\mathbf{k} + 2\pi \mathbf{b}) = E(\mathbf{k})$$

<sup>2)</sup> F. Stallmann, Konf. Abb. gew. Kreisbogenvierecke als Eigenwertproblem. Math. Zeitschr. 59, 211–230 (1953).

<sup>1)</sup> Sommerfeldt-Bethe, Hdb. d. Physik 24,2 p. 368 ff.

für alle  $\mathbf{b}$  mit  $\mathbf{b}$  a ganze Zahl ( $\mathbf{a}$  beliebiger Gittervektor). Die  $\mathbf{b}$  spannen das zu dem Kristallgitter reziproke Gitter auf. Es genügt, sich auf denjenigen Bereich in  $\mathbf{k}$  zu beschränken, der aus der Mannigfaltigkeit der Vektoren  $\mathbf{k} + 2\pi \mathbf{b}$  ( $\mathbf{k}$  fest) den jeweils kürzesten enthält. Die so konstruierte „erste Brillouinsche Zone“ ist identisch mit der Elementarzelle des reziproken Gitters.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich aus der Symmetrie der Brillouinsche Zone. Für kubisch raumzentriertes Kristallgitter genügt es, den herausgezeichneten Sektor zu untersuchen. Liegt der Wellenvektor in einer Symmetrieebene oder -achse, so zerfallen die Wellenfunktionen in Klassen, je nach ihrem Verhalten gegenüber den Drehungen und Spiegelungen, die das Gitter in sich überführen und außerdem den Wellenvektor ungeändert lassen<sup>2)</sup>. [Außer Punkt  $\Gamma$ ,  $\mathbf{k} = 0$ , hat auch Punkt  $H$ ,  $\mathbf{k} = (1, 0, 0)$  volle kubische Symmetrie, vgl. <sup>2)</sup>].

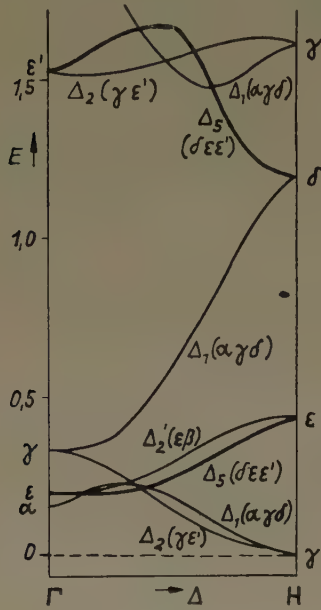


Bild 4. Energie in Abhängigkeit vom Wellenvektor

Die Methode, nach der hier gerechnet wurde, ist die sogenannte Streumatrix-Methode von Korringa<sup>3)</sup>. In den Randgebieten der Elementarzelle kann das Potential als annähernd konstant angesehen werden. Wir stellen dort die Wellenfunktion dar als Superposition von einer von  $r = 0$  auslaufenden Kugelwelle und in einer in  $r = 0$  regulären Welle

$$\psi = \psi_{\text{out}} + \psi_{\text{reg}}$$

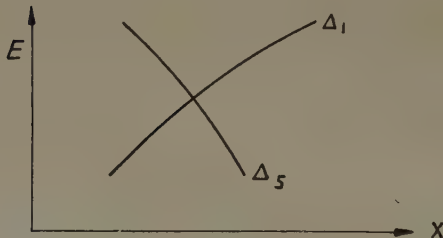
Daß beide Anteile zusammen die Schrödingergleichung befriedigen müssen, gibt eine lineare Beziehung zwischen ihnen,

$$\psi_{\text{out}} = S \psi_{\text{reg}}$$

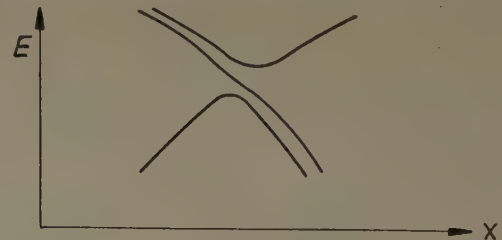
Eine zweite Beziehung ist dadurch gegeben, daß sich der reguläre Anteil zusammensetzt aus den auslaufenden Wellen der andern Zentren

$$\psi_{\text{reg}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{a} \neq 0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} \psi_{\text{out}}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \Gamma \psi_{\text{out}}$$

entsprechend der Blochschen Bedingung. Die Kompatibilität beider Beziehungen liefert den gewünschten Zusammenhang zwischen  $E$  und  $\mathbf{k}$ . Es wird also in dieser Methode die Erfüllung der Differentialgleichung und die der Randbedingung in gleicher Weise behandelt. Zur praktischen Durchführung wird  $\psi$  in ein orthogonales Funktionssystem entwickelt. Die Winkelabhängigkeit ist durch Kugelflächenfunktionen (Ordnung  $l$ ) gegeben, die



$$\mathbf{k} = (0, 0, x)$$



$$\mathbf{k} = (y_1, y_2, x) \quad y_1, y_2 \ll x$$

Bild 5

nach ihrer Symmetrie der kubischen Dreh-Spiegelungsgruppe gegenüber geordnet sind („cubic harmonics“<sup>4)</sup>).

Die Radiusabhängigkeit von  $\psi$  ist dann durch halbzahlige Zylinderfunktionen gegeben,

regulärer Anteil

$$j_l(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{k_0 r}} J_{l+\frac{1}{2}}(k_0 r),$$

auslaufender Anteil

$$h_l(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{k_0 r}} H_{l+\frac{1}{2}}(k_0 r)$$

mit

$$j_0(\varrho) = \frac{\sin \varrho}{\varrho} \quad \text{und} \quad h_0(\varrho) = \frac{e^{i\varrho}}{\varrho},$$

<sup>2)</sup> Bouckaert-Smoluchowski, -Wigner, Phys. Rev. 50, 58 (1936).

<sup>3)</sup> Korringa, Physica 13, 392 (1947); vgl. auch Harrison, Phys. Rev. 84, 377 (1951).

<sup>4)</sup> v. d. Lage-Bethe, Phys. Rev. 71, 612 (1947).



$k_0$  ist ein Maß für die Energie bezogen auf das (annähernd konstante) Potential  $V_0$  im Randgebiet,  

$$\frac{1}{2} k_0^2 = E - V_0.$$

Damit werden  $\Gamma$  und  $S$  Matrizen und die Kompatibilitätsbedingung lautet

$$\text{Det} |\Gamma - S^{-1}| = 0.$$

Die Hauptarbeit der praktischen Berechnung liegt in der Ermittlung von  $\Gamma$ . Im allgemeinen hat man bei Entwicklung bis zur 3. Ordnung eine hermitesche Matrix 16. Grades, d. h. 136 Koeffizienten, die ihrerseits Funktionen von  $\mathbf{k}$  und  $k_0$  sind. Liegt  $\mathbf{k}$  in einer Symmetrieebene oder gar -achse, so reduziert sich die Zahl der Koeffizienten entsprechend dem Zerfall der Wellenfunktionen in Symmetrieklassen. Da  $\Gamma$  nur von der Symmetrie des Gitters, nicht vom speziellen Ansatz  $V(\mathbf{r})$  abhängt, können die Werte für sämtliche Kristalle gleichen Gittertyps verwendet werden.  $S$  hingegen ist wesentlich abhängig von  $V(\mathbf{r})$ . In erster Näherung kann jedoch  $V$  kugelsymmetrisch angenommen werden und die Berandung der Elementarzelle durch eine Kugel ersetzt werden (z. B. gleichen Rauminhalts). Dann ist  $S = S(E)$  eine Diagonalmatrix, die nur soviel verschiedene Elemente enthält als  $l$ -Werte auftreten, bei Entwicklung bis zur 3. Ordnung also 4. Diese müssen als Funktionen von  $E$  durch Integration der Schrödinger Gleichung gefunden werden. Bild 4 zeigt die Ergebnisse für Niobium-Metall ( $Z = 41$ ) für den Fall  $\mathbf{k} = (0, 0, x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ). Die Buchstaben  $\alpha, \dots, \varepsilon, \varepsilon'$  bezeichnen die Symmetrieklassen der zugehörigen Wellenfunktionen.  $\gamma$  ist zweifach,  $\delta, \varepsilon, \varepsilon'$  dreifach entartet<sup>4)</sup>. Für  $x \neq 0$  oder 1 hat man entsprechend der geringeren Symmetrie des Wellenvektors weniger Symmetrieklassen ( $A_1, \dots, A_5$ )<sup>2)</sup>, die sich als Linearkombinationen der Klassen  $\alpha, \dots, \varepsilon'$  darstellen lassen.  $A_5$  ist zweifach entartet. Für benachbarte  $\mathbf{k}$ -Vektoren würde die Energie aufspalten. Außerdem verschwinden dann die Überkreuzungen: (schematische Zeichnung)

$$\mathbf{k} = (0, 0, x) \qquad \mathbf{k} = (y_1, y_2, x) \ (y_{1,2} \ll x).$$

Die Energie  $E = 1$  entspricht der Energie eines freien Elektrons mit der Wellenzahl  $|\mathbf{k}| = 1$  (in unserm, dem Gitter angepaßten Maßsystem). Die endgültige Bestimmung der Elektronendichte als Funktion von  $E$  kann erst vorgenommen werden, wenn im  $\mathbf{k}$ -Raum soviel Punkte berechnet sind, daß dazwischen interpoliert werden kann.

Eine ausführliche Darstellung wird in den Phys. Rev. erscheinen.

## Über die glatte Ausgleichung von Wertefolgen

Von Fr. Wecken in Haltingen

Es seien  $n$  reelle oder komplexe Zahlen  $x_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) gegeben als Näherungswerte bei  $t = \nu$  für eine Funktion  $f(t)$ , die für  $1 < t < n$  stetige  $(k-1)$ te und stückweise stetige  $k$ -te Ableitung hat. Erfüllt  $g(t)$  diese Differenzierbarkeitsbedingungen, so verwenden wir  $A(g) = \sum_{\nu=1}^n |g(\nu) - x_\nu|^2$  und  $B(g) = \int_1^n |g^{(k)}(t)|^2 dt$  als Maß für die Anpassung von  $g(t)$  an die  $x_\nu$  bzw. für die Glätte von  $g(t)$ . Wir schreiben  $\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_\nu\}_{(1 \leq \nu \leq n)} = \mathfrak{x}$ . Bei festem  $\mathfrak{x}$ ,  $k$  und  $\lambda > 0$  stellen wir das Problem:

$$A(g) + \lambda B(g) = \min \dots \dots \dots (1).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dabei  $g^{(2k)}(t) = 0$  für  $\nu < t < \nu + 1$  ( $0 < \nu < n$ ) gefordert werden.  $A(g)$  und  $B(g)$  hängen dann nur von den  $nk$  Werten  $g^{(\kappa)}(\nu)$  ( $0 \leq \kappa < k$ ,  $0 < \nu \leq n$ ) bzw. den  $k$  Vektoren  $\mathbf{g}^{(\kappa)} = \{g^{(\kappa)}(\nu)\}_{(0 < \nu \leq n)}$  ab. Die zu (1) gehörigen Normalgleichungen haben eine eindeutige Lösung  $\mathbf{g}^{(\kappa)} = \mathbf{f}^{(\kappa)}$  von der Form

$$\mathbf{f} = G \mathfrak{x} = (E + \lambda M)^{-1} \mathfrak{x}, \quad \mathbf{f}^{(\kappa)} = D_\kappa \mathbf{f}; \quad \dots \dots \dots (2)$$

die Matrizen  $M$  und  $D_\kappa$  des Grades  $n$  hängen von  $k$ , nicht aber von  $\lambda$  und den  $x_\nu$  ab. Aus den  $\mathbf{f}^{(\kappa)}$  ergibt sich  $f(t)$  eindeutig durch Polynominterpolation in jedem Intervall  $\nu \leq t \leq \nu + 1$  ( $0 < \nu < n$ ); dieses  $f(t)$  ist die Lösung von (1). — Bei festem  $\mathfrak{x}$  und  $k$  hängen  $f(t)$ ,  $A(f)$  und  $B(f)$  analytisch von  $\lambda$  ab. Die Grenzfälle  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  schließen sich stetig an und erfüllen die Forderung  $B(g) = \min = B_0$  bei  $A(g) = 0$  (reine Interpolation) bzw.  $A(g) = \min = A_\infty$  bei  $B = 0$  (Ausgleichspolynom  $(k-1)$ ten Grades). — Das gewonnene Verfahren ist jedoch schwerfällig; insbesondere stört die Abhängigkeit aller Größen von  $n$ .

Für *zweiseitig unendliche Folgen*  $\mathfrak{x} = \{x_v\}_{(-\infty < v < \infty)}$  wird das Ausgleichungsverfahren wesentlich handlicher. Ist eine längere endliche Wertefolge gegeben, so empfiehlt sich ihre Ergänzung auf  $-\infty < v < \infty$ . — Die unendliche Folge  $\mathfrak{x}$  besitze eine beschränkte Differenzenfolge endlicher Ordnung  $m$ ; wir schreiben:  $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_m$ . Fordern wir nun (1) für jedes endliche Intervall  $v_1 \leq t \leq v_2$  bei festgehaltenen Randwerten, so ergeben sich wieder  $k$  vektorielle Normalgleichungen mit eindeutiger Auflösung (2). Dabei sind  $M$  und  $D_\lambda$  rationale Funktionen des durch  $Q\{x_v\} = \{x_{v+1}\}$  erklärten Operators  $Q$  mit von  $k$  abhängigen Koeffizienten.  $G$  ist eine *Glättungsformel* (nach I. J. Schoenberg, Quart. Appl. Math. 4, 45—99; 112—141 [1946]) der

Gestalt  $f(v) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q x_{v+q}$ . Es ist  $G = r(Q)$  mit rationalem  $r$  und  $r(q) = \sum_{e=-\infty}^{\infty} G_e q^e$  für  $|q| = 1$ .

Ist  $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_m$ , dann  $\mathfrak{f} \in \mathfrak{B}_m$ ,  $\mathfrak{x} - \mathfrak{f} \in \mathfrak{B}_{\max(0, m-2k)}$ ,  $\mathfrak{f}^{(x)} \in \mathfrak{B}_{\max(0, m-x)}$ . Zweckmäßig ist  $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_{2k-1}$  zu fordern. —  $f(t)$  entsteht wie oben durch Polynominterpolation. Die Zuordnung  $\mathfrak{x} \rightarrow f(t)$  ist für  $\lambda = 0$  eine *gewöhnliche*, für  $\lambda > 0$  eine *glättende Interpolationsformel* nach Schoenberg; sie ist, ebenso wie  $G$  und die Differentiatoren  $D_\lambda$ , exakt für Polynome vom Grad  $2k-1$ .  $\lambda \rightarrow \infty$  ist nicht allgemein ausführbar. Für die „harmonischen Schwingungen“  $\eta_u = \{e^{iv_u}\}_{(-\infty < v < \infty)}$  ( $-\pi < u \leq \pi$ ) gilt  $G \eta_u = \gamma(u) \eta_u$  mit der *charakteristischen Funktion*  $\gamma(u) = r(e^{iu})$ ; es ist  $0 < \gamma(u) < 1$  für  $u \neq 0$ ,  $\gamma(u) = 1 - \lambda u^{2k} + \dots$  für  $u \rightarrow 0$ . Bei Anwendung auf Linearkombinationen der  $\eta_u$  wirkt  $G$  wie ein phasentreues lineares Übertragungsglied mit dem Dämpfungsfaktor  $\gamma(u)$ . Für  $k \leq 6$  läßt sich auf Grund der expliziten Gestalt von  $G$  noch aussagen:  $\gamma(u)$  fällt monoton mit wachsendem  $|u|$ ; mit wachsendem  $k$  nähert sich  $\gamma(u)$  einem Verlauf, der einem Tiefpaß entspricht, wobei die Grenzfrequenz mit wachsendem  $\lambda$  abnimmt.

Der Wert von  $k$  ist in der Regel aus der physikalischen Situation eindeutig bestimmbar. Bezüglich  $\lambda$  jedoch scheint eine willkürfreie allgemeine Festlegung kaum möglich. Für spezielle Fälle legt die folgende Überlegung eine bestimmte, nur auf  $\mathfrak{x}$  und  $k$  bezugnehmende Wahl von  $\lambda$  nahe. — Sind  $\mathfrak{x}$  sowie  $\mathfrak{g}^{(x)}$  ( $0 \leq x < k$ ) Linearkombinationen der  $\eta_u$ , so lassen sich  $A(g)$  und  $B(g)$  durch Mittelbildungen (wie bei fastperiodischen Funktionen) erklären, und  $f(t)$  ist wieder die Lösung von (1). Werden  $A(f)$  und  $B(f)$  als Funktionen von  $\lambda$  bei festem  $\mathfrak{x}$  und  $k$  betrachtet, und ist  $s$  die Anzahl verschiedener Frequenzen  $|u| \neq 0$ , die in der Darstellung von  $\mathfrak{x}$  vorkommen, so gilt: für  $s = 0$  ist  $A(f) = B(f) = 0$  für jedes  $\lambda$ . Für  $s = 1$  ist  $\sqrt{A(f)/A_\infty} + \sqrt{B(f)/B_0} = 1$  für jedes  $\lambda$ . Für  $s > 1$  hat  $\sqrt{A(f)/A_\infty} + \sqrt{B(f)/B_0} = \min$  genau eine Lösung  $\lambda = \lambda^*$ . Für  $s = 2$  ist  $\lambda^*$  nur von den beiden Frequenzen, nicht von den Amplituden abhängig, und  $G$  (mit  $\lambda = \lambda^*$ ) bewirkt bei nicht zu kleinem  $k$  nahezu eine Reproduktion der langsameren und Vernichtung der schnelleren Schwingung. Für  $s > 2$  ist  $\lambda^*$  auch von den Amplituden abhängig, jedoch gilt Ähnliches wie bei  $s = 2$ , wenn die Frequenzen sich auf zwei schmale, deutlich getrennte Bereiche verteilen.

#### Referate der Vorträge:

R. Albrecht, München: Ein Iterationsverfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete auf einen Kreisring;

E. Bukovics, Wien: Zur Abschätzung des Fehlers beim Runge-Kutta-Verfahren und beim Verfahren von Blaess.

L. Holzer, Rostock: Laplace-Transformation der Besselschen Funktionen.

G. Lyra, Göttingen: Über eichinvariante Kennzeichnung der Räume konstanter Krümmung.

L. Occhini, Sao Paolo: Determinazione degli zeri di un polinomio a coefficienti reali.

sind nicht eingegangen.



## B. Rechenmaschinen

### Programmorganisation bei kleinen Rechenautomaten mit innerem Programm

Von H. Pösch und Th. Fromme in Weil/Rhein.

Wenn man die Programmierung auf einem modernen Rechenautomaten studieren will, braucht man ein sprachliches Mittel, um die Arbeitsweise der Maschine darzustellen.

Schon beim Bau einer Rechenmaschine müssen sich Mathematiker und Elektroniker darüber verständigen, was die Maschine leisten soll. Verständigen heißt in diesem Fall die gleichen Bezeichnungen und den gleichen Code für die einzelnen Funktionen der Maschine benutzen. Wir haben uns zunächst nur zum Studium der Programmierung und zum Unterricht in Programmierungsfragen das Modell einer Maschine überlegt, deren Befehlscode so einfach ist, daß man ihn schnell erlernen kann, die aber alles das leistet, was an komplizierten Operationen in modernen Rechenautomaten auftritt.

Zur Ausführung der arithmetischen Operationen muß eine Maschine mindestens folgende Bauteile enthalten:

1. einen Speicher
2. ein Addierwerk für die Addition mit Resultatsregister (Akkumulator)
3. ein Komplementwerk, das zu jeder Zahl die Komplementzahl bildet und
4. ein Register, das eine Stellenverschiebung der Zahlen vornimmt. (Shiftregister).

Diese arithmetischen Operationen und Zahlentransporte müssen von einem Leitwerk nach Anweisung des jeweils im Befehlsregister gespeicherten Befehls gesteuert werden. Die Befehle für die Zahlenoperationen drücken wir durch ein Operationszeichen und eine Speicheradresse aus. Sie bedeuten:

Am:  $\langle \text{Akku.} + \langle m \rangle \Rightarrow \text{Akku}$

Sm:  $\langle \text{Akku} \rangle - \langle m \rangle \Rightarrow \text{Akku}$

Tm:  $\langle \text{Akku} \rangle \Rightarrow m$

$\langle \rangle$  bedeutet: „Inhalt von“,  $m$  heißt Speicheradresse und  $\Rightarrow$  „Transport nach“.

Das Befehlsregister kann seine Befehlstexte von einem Lochband, einer Lochkarte etc. erhalten. Wir sprechen in diesem Fall von einer Maschine mit äußerem Programm.

Die volle Flexibilität der großen Universalmaschinen erreicht man erst mit gespeichertem Programm. Die Modellmaschine soll auch mit innerem Programm arbeiten, muß daher einen Befehl enthalten, der den Transport vom Speicher zum Befehlsregister besorgt. Wir vercoden ihn mit

Em:  $\langle m \rangle \Rightarrow b$ .

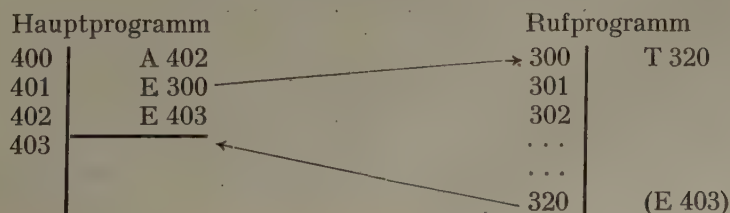
Der E-Befehl transportiert nicht nur nach  $b$ , sondern löst nach Rückführung des arithmetischen Befehls den Befehl  $E(m+1)$  aus. Eine solche Maschine könnte zwar alle Befehle (auch die bedingten) durchführen, wollte man sie aber realisieren, so ergäben sich zu lange Operationszeiten.

Da man in der Praxis doch noch einige Bauteile hinzufügen muß, wie zum Beispiel ein Bedingungs-Flip-Flop, haben wir sogleich bedingte Befehle vorgesehen.

Unser Maschinencode weicht also von dem einer theoretischen Minimalmaschine bereits ab. Für die Bedingung verwenden wir die Zeichen P und Q. Dabei bedeutet ein P vor irgend einem Befehl (z. B. PAm): der Befehl ist nur durchzuführen, wenn der Inhalt eines besonderen Registers des Kennregisters, positiv ist. Q reagiert entsprechend auf negatives Kennregister.

In der Sprache dieser so erweiterten Minimalmaschine wollen wir zunächst einige Programmtypen besprechen.

Als Rufprogramme bezeichnen wir solche Befehlsfolgen, in denen die Maschine veranlaßt wird, nach Ausführung der Operationsbefehle wieder an die Stelle zurückzukehren, von der aus das Programm gerufen wurde. Schreiben wir vor einen senkrechten Strich die Nummern der Speicher und daneben jeweils den Speicherinhalt, so erhalten wir das folgende Beispiel für ein Rufprogramm.



Als Rufprogramme benötigen wir zunächst die Operation in fließendem Komma ( $\pm$ ,  $\times$ ,  $:$ ), aber auch komplizierte Operationen ( $e^x$ ,  $\sin x$ ) können so organisiert sein. Sind die Rufprogramme in der Maschine fest notiert, so braucht der Mathematiker ihre Organisation beim Programmieren nicht mehr zu beachten. Alle Speicherinhalte werden durch ein Lochband eingegeben und in jeder Maschine dient ein spezielles Programm, das wir Leseprogramm nennen, dazu, die vercodeten Lochgruppen in Maschinentexte zu übersetzen. Dieses Leseprogramm kann man benutzen, um eine Vielzahl von Aufgaben zu erfüllen. Im ersten Beispiel wählen wir die sogenannten symbolischen Befehle. Der Mathematiker schreibt auf der Schreibmaschine z. B.  $\times A 600$ ,  $\sin A 700$  mit der Bedeutung: multipliziere den Inhalt von 600 (z. B.  $y$ ) mit dem letzten Rechenresultat, berechne den Sinus von  $x$ , wobei  $x$  in 700 steht. Das Leseprogramm übersetzt solche symbolischen Befehle durch geeignete Transportbefehle und setzt statt des Mal-Zeichens, bzw. statt des Wortes „sin“ einen Sprungbefehl in das Multiplikations-Rufprogramm (z. B. E 300), bzw. in das Sinus-Rufprogramm (z. B. E 780). Man kann im Leseprogramm, das natürlich die Befehle nacheinander in die fortlaufenden Speichernummern  $n$ ,  $n + 1 \dots$  bringt, auch Umrechnungen der Adressen der Befehle durchführen lassen. Auch die sofortige Ausführung gewisser Befehle kann das Leseprogramm veranlassen. Solche Befehle heißen in der EDSAC Controlcombination. Zu diesen gehört auch die Notierung der ersten Einschreibadresse  $n$  in das Leseprogramm. Zahlen muß das Leseprogramm in das Dualsystem übersetzen unter Berücksichtigung des fließenden Kommas.

Um so vielfältige Aufgaben zu lösen, bedarf es einer besonderen Organisation des Leseprogramms. Sehr starke Hilfsmittel sind Stellwerk und Weichen. Unter einem Stellwerk verstehen wir einen Programmteil, der auf Grund gewisser Informationen (in diesem Fall Lochkombinationen) einen oder mehrere Befehle, insbesondere einen Sprungbefehl eines anderen Programmteils errechnet und dort einschreibt. Einen solchen variablen Befehlstext nennen wir eine Weiche.

Diese Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie bereits an diesem einfachen Modell komplizierte Programmierungsfragen diskutiert werden können. Darüber hinaus kann dies theoretische Modell Auskunft darüber geben, welche Rufprogramme häufig gebraucht werden, viel Zeit erfordern und daher in einer größeren Maschine durch einen elektronischen Automaten ersetzt werden sollten. Wenn man viele Programme auf der einfachen Maschine programmiert hat, kann man sogar die Vorteile einzelner elektronischer Automaten gegeneinander abwägen. Auch kann man die Frage diskutieren, wie weit es möglich ist, den einzelnen Rufprogrammen ein spezielles Unterbefehlszentrum zu geben und sie in Mikroprogrammierung schnell durchführen zu lassen.

Man kann auch daran denken, eine solche einfache Maschine zu bauen. Natürlich muß man der Rechengeschwindigkeit halber noch einige Elektronik hinzufügen. Eine solche Maschine wäre für Institute, die über geringe Geldmittel verfügen und schon mit einer kleinen Rechengeschwindigkeit auskommen, interessant. Es ist auch in Erwägung zu ziehen, ob neben einer großen Maschine eine kleine folgenden Zwecken dienen kann:

1. Der Übersetzung langer und komplizierter Programmfolgen aus der dem Mathematiker geläufigen Formelsprache (Superprogramm).
2. Zur Erprobung der für die große Maschine aufgestellten Programme.

Man kann der kleinen Maschine ein spezielles Ausführungsprogramm geben, das alle Schritte der großen Maschine nachahmt. Die kleine Maschine würde dann gestatten, Programmkontrollen ohne Unterbrechung der Arbeiten der großen Rechenmaschine durchzuführen und insbesondere dann Zeit und Geld sparen, wenn auf der großen Maschine viele verschiedene Programme von vielen Mathematikern mit unterschiedlicher Maschinenerfahrung durchgeführt werden sollen.

## Der dreiwertige Aussagenkalkül der theoretischen Logik und seine Anwendung zur Beschreibung von Schaltungen, die aus Elementen mit zwei stabilen Zuständen bestehen

Von *Hans Rohleder* in Dresden

Zur Beschreibung von elektrischen Schaltungen wird normalerweise der Aussagenkalkül der theoretischen Logik verwendet. Dabei ist es üblich, neben den logischen Grundverknüpfungen wie Negation, Disjunktion und Konjunktion, das Gleichheitszeichen zu verwenden. Ist z. B. ein Relais  $X$  über den Kontakt  $A$  mit der Spannungsquelle verbunden (Bild 1a), so beschreibt man den Sachverhalt durch die Gleichung

$$X = A \dots \dots \dots (1).$$



Es gibt jedoch auch Schaltungen, deren zugehörige Gleichung in der zweiwertigen Logik keinen Sinn hat. Ersetzt man z. B. den Kontakt  $A$  durch  $\bar{X}$  (Bild 1b), so kann die entstehende Gleichung

$$X = \bar{X} \quad \dots \dots \dots (2)$$

durch keinen Wert von  $X$  erfüllt werden. Diese Schwierigkeit kann überwunden werden, wenn man den zweiwertigen Aussagenkalkül zu einem dreiwertigen verallgemeinert.

Die im folgenden betrachteten Aussagen sollen immer drei Wahrheitswerte haben können. Der Wahrheitswert einer Aussage  $A$ , der mit  $W(A)$  bezeichnet werden soll, ist eine Zahl und zwar entweder 0 oder  $1/2$  oder 1. Zu den üblichen Werten 0 und 1 kommt also als dritter Wert  $1/2$  (unbestimmt) hinzu.

Das Relais  $X$  in Bild 1b zieht an und fällt gleich darauf wieder ab usw. Schaltet man einen Kontakt von  $X$  in Reihe mit einem geschlossenen Kontakt eines anderen Relais, so erhält man die gleiche Ausgangsspannung, als wäre nur der Kontakt von  $X$  vorhanden. Berücksichtigt man alle entsprechenden Ergebnisse und verlangt, daß die Konjunktion auch hier die Reihenschaltung beschreiben soll, so erhält man:

$$W(A \& B) = \text{Min. } [W(A), W(B)]^1 \quad \dots \dots \dots (3).$$

Entsprechend:

$$W(A \vee B) = \text{Max. } [W(A), W(B)] \quad \dots \dots \dots (4)$$

und

$$W(\bar{A}) = 1 - W(A) \quad \dots \dots \dots (5).$$

Der Kalkül ist mit diesen Operationen noch nicht funktionell vollständig. Deshalb werden zwei weitere Operationen eingeführt:

$$W(\hat{A}) = \begin{cases} W(A) & \text{für } W(A) \neq 1/2 \\ 0 & \text{für } W(A) = 1/2 \end{cases} \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$W(\check{A}) = \begin{cases} W(A) & \text{für } W(A) \neq 1/2 \\ 1 & \text{für } W(A) = 1/2 \end{cases} \quad \dots \dots \dots (7).$$

Eine dieser beiden Operationen ist an und für sich entbehrlich; sie stehen in einem ähnlichen Verhältnis zueinander wie Konjunktion und Disjunktion.

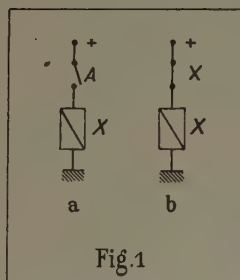


Fig. 1

Bild 1

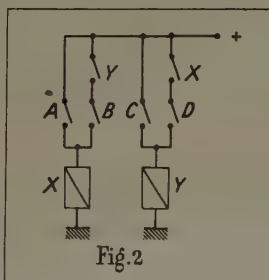


Fig. 2

Bild 2

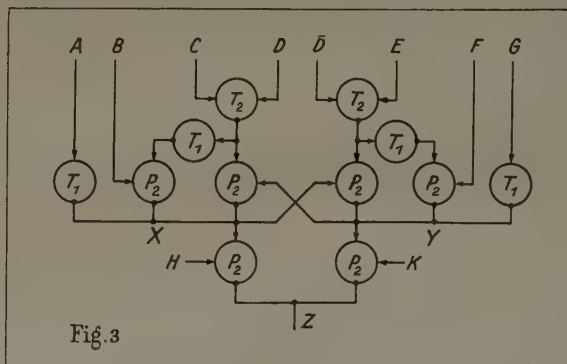


Fig. 3

Bild 3

Die Einführung der beiden zuletzt genannten Operationen in dieser Form wird durch den Erfolg gerechtfertigt. Der zweiwertige Aussagenkalkül, wie er z. B. im ersten Kapitel von D. Hilbert, W. Ackermann „Grundzüge der theoretischen Logik“<sup>2)</sup> dargestellt wird, kann nämlich bis auf den Teil, der sich mit der Axiomatisierung beschäftigt, fast vollständig übertragen werden.

Die Analogien gehen so weit, daß selbst das Dualitätsprinzip beinahe wörtlich übertragen werden kann. Es lautet: Von einer in Normalform vorliegenden Funktion erhält man die Negation, indem man an allen Stellen die Konjunktion und Disjunktion sowie die Operationen  $\hat{\phantom{x}}$  und  $\check{\phantom{x}}$  vertauscht und alle Grundaussagen durch ihre Negation ersetzt.

Die Angabe näherer Einzelheiten über den dreiwertigen Kalkül sowie auch die Erklärung des im Dualitätsprinzip verwendeten Begriffs Normalform würde hier zu weit führen.

<sup>1)</sup> Das Konjunktionszeichen  $\&$  wird im folgenden fortgelassen.

<sup>2)</sup> Springer-Verlag: Berlin 1949.

Noch eine kurze Bemerkung über den Begriff der „ausgezeichneten Wahrheitswerte“ (designated truth values), wie er bei der Axiomatisierung der mehrwertigen Logik verwendet wird<sup>3)</sup>. Bei allen Betrachtungen, die für die Anwendung wesentlich sind, ist von einem ausgezeichneten Wahrheitswert nichts zu bemerken. Vielmehr sind in allen Fällen die 0 und die 1 vollkommen gleichberechtigt und zueinander dual. Außerdem gelten alle wesentlichen Beziehungen unabhängig davon, ob ein oder zwei ausgezeichnete Wahrheitswerte zugrunde gelegt werden. Es scheint deshalb wünschenswert, auch bei der Axiomatisierung ohne einen ausgezeichneten Wahrheitswert auszukommen.

Im folgenden soll die Verwendung des dreiwertigen Kalküls zur Beschreibung von Schaltungen betrachtet werden.

Jede Schaltung wird durch ein Gleichungssystem beschrieben. Zu Bild 2 z. B. gehört das System

$$X = A \vee BY, \quad Y = C \vee DX \quad \dots \dots \dots (8);$$

wenn  $X$  wird angezogen, wenn entweder  $A$  geschlossen ist oder  $B$  und  $Y$ , und  $Y$  wird angezogen, wenn  $C$  geschlossen ist oder  $X$  und  $D$ .

In Bild 3 sind dieselben Symbole wie in „Synthesis of Electronic Computing and Control Circuits“<sup>4)</sup> verwendet. Das Potential an einigen Punkten, bei denen der Potentialverlauf nicht sofort klar ist, wird als Unbekannte des Systems eingeführt. Man erhält so das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} X &= \overline{A \vee B(C \vee D) Y (\overline{C \vee D})} \\ Y &= \overline{G \vee F(E \vee \overline{D}) \vee X(E \vee \overline{D})} \\ Z &= \overline{XH \vee YK} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9).$$

Allgemein erhält man ein System von der Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} X &= f(A, B, \dots C, X, Y, \dots Z) \\ Y &= g(A, B, \dots C, X, Y, \dots Z) \\ &\dots \dots \dots \\ Z &= h(A, B, \dots C, X, Y, \dots Z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10).$$

Dabei wirken die „Elemente“  $A, B, \dots C$  von außen in die Schaltung hinein, die „Elemente“  $X, Y, \dots Z$  werden erst durch das System definiert.

Als nächstes werden die Lösungsverhältnisse eines Gleichungssystems der Form (10) betrachtet. Es kann gezeigt werden, daß jedes System, welches eine Schaltung beschreibt, mindestens eine Lösung hat. In der Bedingung „welches eine Schaltung beschreibt“ liegt eine Einschränkung der Funktionen  $f, g, \dots h$ . Diese Einschränkung muß natürlich exakt formuliert werden, indem die Klasse der zulässigen Funktionen genau angegeben wird. Das würde jedoch zu weit führen.

Im allgemeinen haben die betrachteten Systeme nicht nur eine sondern mehrere verschiedene Lösungen. Eine dieser Lösungen ist besonders ausgezeichnet. Sie soll Hauptlösung genannt werden.

Die Hauptlösung ist die Lösung, welche am häufigsten den Wert  $1/2$  für die abhängigen Variablen liefert. Faßt man eine spezielle der abhängigen Variablen ins Auge, so wird für gewisse Wertekombinationen der unabhängigen Variablen vom Gleichungssystem für die betrachtete abhängige Variable der Wert 0 oder 1 vorgeschrieben werden. Die Hauptlösung liefert für alle Wertekombinationen, für die nicht unbedingt der Wert 0 oder 1 vorgeschrieben ist, den Wert  $1/2$ . Sie ergibt also auch dann den Wert  $1/2$ , wenn das betrachtete Relais Haltespannung hat.

Die Hauptlösung kann in jedem speziellen Fall rechnerisch ermittelt werden. Das Verfahren soll nicht in allen Einzelheiten angegeben werden. Es besteht im wesentlichen aus einer Iteration des Systems. Der Iterationsprozeß ist immer nach endlich vielen Schritten beendet. Diese Tatsache hat ihre Ursache darin, daß es bei einer festen Zahl von Variablen nur endlich viele Funktionen von diesen Variablen gibt.

Zum Abschluß noch einige Anwendungsmöglichkeiten.

Mit der Ermittlung der Hauptlösung ist ein Fortschritt bei der Analyse von Schaltungen erzielt. Im Beispiel von Bild 2 würde man normalerweise bei den Gleichungen (8) stehenbleiben. Durch Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste erhält man:

$$X = A \vee BC \vee BDX \quad \dots \dots \dots (11).$$

Hier ist auch das indirekte Anziehen von  $X$  über  $BC$  zu erkennen.

<sup>3)</sup> Man vgl. z. B.: J. B. Rosser, A. R. Turquette, „Many-valued Logics“ North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1952.

<sup>4)</sup> Harvard University Press; Cambridge, Massachusetts 1951.



Dieser prinzipielle Fortschritt ist jedoch praktisch nicht immer ausreichend; denn bei vielen Schaltungen erhält man für alle abhängigen Variablen in jedem Fall den Wert 1/2.

Bei einer noch tiefer gehenden Analyse dürfte man nicht nur den Zustand einer Schaltung bei einer bestimmten Wertekombination der unabhängigen Variablen ins Auge fassen, sondern man müßte auch das Verhalten der Schaltung beim Übergang von einer Wertekombination zur anderen betrachten. Dazu ist es jedoch notwendig, bestimmte Annahmen über die verwendeten Schaltelemente zu machen. Bei Relais muß z. B. die Anzugs- und Abfallverzögerung bekannt sein. Es ist klar, daß der Aussagenkalkül dazu nicht ausreichend ist.

Außerdem wird durch den dreiwertigen Kalkül die Aufmerksamkeit auf eine Klasse von Röhrenschaltungen gelenkt, die bisher nicht beachtet worden ist. Von der Schaltung Bild 3 wird, wenn  $A \dots K$  zweiwertige Aussagen sind, der logische Ausdruck

$$Z = [A \vee \bar{H} \vee B(C \vee D) \vee \bar{G} \bar{F} \bar{C} \bar{D}] [G \vee \bar{K} \vee F(E \vee \bar{D}) \vee \bar{A} \bar{B} \bar{E} \bar{D}] \dots \dots \dots (12)$$

gebildet. Die Schaltung hat also mit einem Flip-Flop nichts gemeinsam. Der Ausdruck könnte auch ohne Rückkopplung gebildet werden. Es wären dann aber mehr Röhren erforderlich.

Schließlich kann eine rein rechnerische Methode zur Aufstellung von Kontaktbrückenschaltungen angegeben werden. Die bisher bekannten Methoden<sup>5)</sup> greifen neben der Rechnung auf Schaltskizzen zurück.

## Projekt einer elektronischen Rechenmaschine an der E.T.H. (ERMETH)

Von A. P. Speiser in Zürich (Inst. f. angew. Math. d. E.T.H. Zürich)

### Allgemeines

Die Darstellung der 16stelligen Dezimalzahlen erfolgt in Tetraden nach A i k e n, indem jeder Dezimalziffer vier Dualziffern mit den Gewichten  $2^*$ , 4, 2, 1 zugeordnet sind. Ein Wort hat also 64 Dualziffern. Die Tetraden werden parallel geführt, die Dezimalziffern in Serie. Die Folgefrequenz der Impulse beträgt (außer im Speicherwerk) 32 kHz. Somit benötigt die Übertragung eines Wortes 4 Leitungen und dauert 0,5 ms.

Wir unterscheiden 3 Klassen von Wörtern, nämlich:

1. Zahlen in halblogarithmischer Form  $a \cdot 10^\alpha$ . Dabei ist der Exponent  $\alpha$  durch eine 3stellige Dezimalzahl dargestellt. Die Mantisse  $a$  ist ein Dezimalbruch mit 11 wesentlichen Stellen und einem Vorzeichen.
2. Zahlen mit festem Komma. Wir haben für Zahlen dieser Art infolge des Wegfallens des Exponenten 14 Dezimalen zur Verfügung.
3. Befehlspaare. Ein Befehl umfaßt 7 Dezimalen, nämlich 2 Operationsziffern, eine Indexziffer <sup>1)</sup> und 4 Adressenziffern (der Speicher enthält 10 000 Wörter).

Außerdem ist jedem Wort noch eine 16te Dezimale zugefügt, welche das sog.  $Q$ -Zeichen<sup>1)</sup> enthält und im übrigen als Kontrolle dient.

### Befehlsgebung

Die beschriebene Maschine ist eine Einadreßmaschine, d. h. jeder Befehl enthält eine Adresse und eine Operation. Die Adresse bezeichnet den zur Operation gehörigen zweiten Operanden, während das Resultat der vorangehenden Operation als 1. Operand dient. Bei gewissen Befehlen (Operationen mit nur einem Operanden) fällt der 2. Operand weg, die Adresse ist in einem solchen Fall irrelevant.

Es ist zu beachten, daß jeder Befehl außer der Adresse (die von 0 bis 9999 laufen kann) und den Operationsziffern noch eine sog. Indexziffer enthält. Wenn diese Indexziffer 0 ist, so geschieht nichts Besonderes. Ist sie aber eine der Ziffern 1 bis 9, so wird die Adresse dieses Befehls vor seiner Ausführung noch um die im Indexregister  $I$  stehende 4stellige Zahl erhöht.

### Rechenwerk und Leitwerk: Schaltungen

Der Wert 0 wird durch eine Spannung von  $-29$  V, der Wert 1 durch  $-7$  V dargestellt. Die Verknüpfung von Variablen geschieht ausschließlich mittels **D i o d e n - N e t z w e r k e n**, deren Eingänge durch Kathodenverstärker gespeist sind. Zur Bildung der Negation und als Zwischenverstärker dienen **I n v e r t e r** (zweistufige Triodenverstärker), die das Signal auf die

<sup>5)</sup> H. Piesch, „Über die Vereinfachung von allgemeinen Schaltungen“. Archiv für Elektrotechnik, XXXIII (1939), S. 733—746 und M. A. Gawrilow, „Relaischaltechnik für Stark- und Schwachstrom-Anlagen“ (aus dem Russischen), Berlin 1953.

<sup>1)</sup> Diese Begriffe sind in „Automatische Rechenplanfertigung“ (Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik Nr. 3) von H. Rutishauser erklärt.

Normalpegel verstärken und von Störungen befreien; sie geben sowohl die Funktion selbst als auch deren Negation ab und werden durch Kathodenverstärker gefolgt. Die Inverter sind stark gegengekoppelt, so daß ein Röhrenabbrand von über 50% ihre Funktion nicht beeinträchtigt.

Kathodenverstärker, Diodennetzwerk und Inverter sind durchwegs gleichstromgekoppelt und bilden zusammen eine „statische Schaltung“. An ihren Eingängen stehen Flip-Flops, die an den Anoden die normierten Pegel von  $-29\text{ V}$  resp.  $-7\text{ V}$  abgeben. Die Flip-Flops sind, wie die Inverter, zur Erhöhung der Betriebssicherheit gegengekoppelt. An den Ausgängen der statischen Schaltung stehen ebenfalls Flip-Flops, welche unter Zwischenschaltung von Uhrimpuls-Toren geschaltet werden. Die schaltenden Uhrimpulse haben eine Dauer von  $1\text{ }\mu\text{s}$  und eine Wiederholungsfrequenz von  $32\text{ kHz}$ . Vor ihrem Eintreffen müssen alle Ausgleichsvorgänge beendet sein.

Verzögerungen erfolgen durch Ketten von Flip-Flops mit zwischengeschalteten Uhrimpuls-Toren.

Verwendete Röhren und Dioden: Ausschließlich E 90 CC und OA 55.

### Rechenwerk und Leitwerk: Organisation

Das Rechenwerk besitzt 3 regenerierende Register, welche Sektoren auf der Magnettrommel sind; ihre Kapazität beträgt je 1 Wort. In ihnen werden, mit Hilfe des Addierwerkes, die Rechenoperationen ausgeführt. Bei Operationen mit gleitendem Komma werden Exponent und Mantisse in den gleichen Registern und im gleichen Addierwerk verarbeitet; ihre Trennung geschieht lediglich durch Zeitstreuung.

Die Rechenzeiten betragen (ohne Suchzeiten):

Addition	5 ms
Multiplikation	16 ms
Division	30 ms.

Die mittlere Suchzeit für ein Wort (Zahl oder Doppelbefehl) dauert 5 ms, und die mittlere Zeit pro Operation in einem typischen Problem beträgt, einschließlich aller Suchzeiten, 16 ms.

### Das Magnettrommel-Speicherwerk

Das Speicherwerk besteht aus einer Magnettrommel von 25 cm Durchmesser und 50 cm Länge; sie rotiert mit 6000 U/min. Die Aufzeichnung erfolgt ebenfalls tetradisch, so daß 4 Magnetköpfe einen dezimalen Kanal bilden. Das Speicherwerk enthält 50 Kanäle (200 Köpfe); in jedem Kanal befinden sich 200 Wörter. Die Kapazität erreicht also 10 000 Wörter. Die axiale Breite eines Kanals beträgt 2 mm, die Impulsdichte etwa 4 pro mm und die Impulsfrequenz 320 kHz. Um beim Ablesen und Speichern eine Anpassung an die 32 kHz des Rechenwerkes zu erreichen, werden die Impulse so geschachtelt, daß jeder zehnte Impuls zum gleichen Wort gehört.

Geschrieben wird im „return-to-zero“-Verfahren, d. h. für die Ziffer 0 erhält der Schreibkopf einen negativen, für 1 einen positiven Stromimpuls von  $1\text{ }\mu\text{s}$  Dauer.

### Eingang und Ausgang

Als Zwischenträger für Eingangs- und Ausgangswerte dienen **L o c h k a r t e n**. Die verwendeten Karten sollen wahlweise auf der ERMETH und auf Lochkarten-Normalmaschinen verarbeitet werden; daher wird auf den Karten die Darstellung der Dezimalen mit 6 Löchern verwendet. Auf einer Karte werden 5 Wörter gelocht.

Die ERMETH hat zwei Kartenstationen; jede kann nach Wahl als Locher oder als Abtaster verwendet werden. Die Stationen verarbeiten pro Sekunde 2 Karten. Total können also pro Sekunde 20 Wörter gelocht oder abgetastet werden. Die Umschaltungen zwischen den Feldern einer Karte und den Stationen erfolgen mit elektromechanischen Koordinatenwählern. Die durch die Maschine zum Lochen abgegebenen Wörter werden zunächst in Gruppen von fünf durch Koordinatenwähler gespeichert, worauf die Karte gesamthaft gelocht wird.

Endgültige Resultate können auch einer **S c h r e i b m a s c h i n e** oder einem **T a b u l a t o r** zugeführt werden. Die Schreibmaschine druckt in zwei Sekunden ein Wort; auf einem Steckbrett können 20 verschiedene Druckschemata vorgewählt und alsdann beliebig programmiert werden. Der Tabulator druckt 2 Wörter pro Sekunde.

### Der Kartenlocher

Die Vorbereitung und die Kontrolle der Lochkarten durch das Personal geschieht auf dem Kartenlocher, der von der Maschine vollständig unabhängig ist und der zwei eigene Kartenstationen sowie einen eigenen Tabulator besitzt.

Weitere Beschreibungen der ERMETH werden erscheinen in der Zeitschr. f. angew. Math. u. Phys. sowie als Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik.



## C. Mechanik

### Obere und untere Schranken für den Drillwiderstand

Von E. R. Berger in Wien

Der Drillwiderstand  $J_t$  kann bekanntlich <sup>1) 2)</sup> als Extremalwert zweier Variationsprobleme aufgefaßt werden; behandelt man diese nach den direkten Methoden, erhält man obere und untere Schranken. Ausgehend vom Spannungshügel, bzw. der Torsionsfunktion  $T$ , erhält man die untere Schranke:

$$J_t \geq \int_{\mathfrak{B} + \mathfrak{E} \mathfrak{B}'} (4T - v^2) dF = 4V - G, \quad \int T dF = V, \quad \text{grad } T = v, \quad \int v^2 dF = G.$$

Die Vergleichsfunktion  $T$  muß am Außenrand Null und im Inneren stetig sein. Integrationsbereich ist der ganze Bereich innerhalb der äußeren Kontur, über Durchbrüchen  $\mathfrak{B}'$  muß  $T = \text{const}$  sein.

Nach der Methode von T r e f f t z kann das Problem so umgeformt werden, daß man die obere Schranke erhält:

$$J_t \leq \int_{\mathfrak{B}} v^2 dF, \quad v = \text{grad } T.$$

Die Vergleichsfunktion  $T$  muß innerhalb der äußeren Kontur, also auch über Durchbrüchen, der DGl:  $\Delta T = -2$  genügen. Integrationsbereich ist nur der Querschnitt selbst, ohne die Durchbrüche. Wirbelbehaftete Felder  $v$  wurden hier willkürlich vom Vergleich ausgeschlossen, obwohl ihre Verwendung manchmal raschere Konvergenz liefert <sup>1)</sup>.

Zur Berechnung dieser oberen Schranke verwendet man zweckmäßig die komplexe Koordinate  $z = x + iy$ . Die Vergleichsfunktion  $T$  wird angesetzt in der Form

$$T = \Re \left[ -\frac{z\bar{z}}{2} + f(z) \right].$$

Dem Vektor  $v$  entspricht die komplexe Zahl

$$v = -z + \widetilde{f'(z)} \quad v^2 = v \cdot \bar{v}.$$

Ansatz von  $f(z)$  als Taylorreihe ergibt für das Funktional einen quadratischen Ausdruck in den Koeffizienten  $c_n$ ; die Extremalforderung liefert ein unendliches lineares Gleichungssystem mit H e r m i t e scher Matrix, dessen Koeffizienten die Form haben

$$\int_{\mathfrak{B}} z^s \bar{z}^t dF = M_{s+t, s-t}.$$

Diese Ausdrücke können als „komplexe Momente“ des Bereiches gedeutet werden. Ihre Ordnung ist  $s + t$ ; sie lassen sich durch die gewöhnlichen Momente derselben Ordnung linear darstellen. Das Gleichungssystem wird orthogonalisiert und man erhält den Extremalwert als unendliche Reihe, deren Teilsummen eine monoton fallende Folge von oberen Schranken bilden. Die erste und die zweite Näherung ergeben die bekannten Schranken <sup>3)</sup>

$$J_I = J_p \quad J_{II} = 4 J_1 J_2 / J_p.$$

( $J_p$  = polares Trägheitsmoment um den Schwerpunkt;  $J_1, J_2$  = Hauptträgheitsmomente.)

Zur Bestimmung der unteren Schranke kann man den Spannungshügel zunächst der Höhe nach affin verzerren. Das ergibt allgemein den einfacheren Ausdruck <sup>1)</sup>

$$J_t \geq 4 V^2 / G.$$

Für sternförmige Bereiche kann man den Spannungshügel als Kegelfläche ansetzen, besser als Kegelstumpf, am besten ist eine Parabel als Meridian, mit dem Scheitel in der Kegelachse. Diese Fläche sei als „Parabelkonus“ bezeichnet. Man erhält die Schranke

$$J_K = F^2 \oint \frac{ds}{p},$$

wobei  $p$  der Abstand der Kurventangente vom (willkürlich gewählten) Ursprung ist.

Beim Dreieck und Viereck kann man  $T$  in bekannter Weise als Produkt ansetzen <sup>2)</sup>. Streifen zwischen parallelen oder leicht geneigten Geraden überdacht man unter Erfüllung der DGl mit einem parabolischen Zylinder bzw. einem hyperbolischen Paraboloid <sup>4)</sup>. Am Ende muß

<sup>1)</sup> C. Weber, Z. angew. Math. Mech. 11 (1931), S. 244–45.

<sup>2)</sup> W. Hofferberth, Stahlbau 17 (1944), S. 12–16.

<sup>3)</sup> E. Nicolli, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924), S. 181–82.

<sup>4)</sup> C. Weber, Z. angew. Math. Mech. 2 (1922), S. 299–302.

ein geeigneter Abschluß angesetzt werden: man verwendet den Produktansatz oder den Parabelkonus.

Anwendung auf einige einfache Figuren (Rechteck, rechtwinkliges Dreieck, gleichschenkeliges Dreieck) zeigt, daß die obere Schranke  $J_{II}$  und die untere Schranke  $J_K$  die Größenordnung richtig wiedergeben. Die Schranke  $J_{IV}$  einerseits, und andererseits die Streifen-Überdachung abgeschlossen mit dem Produktansatz, schließen den Drillwiderstand mit maximal 10% Unterschied ein. ( $J_{III}$  beim langgestreckten gleichschenkligen Dreieck bis 20%.) Kompakte Querschnitte werden besser angenähert als langgestreckte.

## Ein neues graphisches Verfahren zur Schwungradermittlung bei Kolbenmaschinen

Von K. Desoyer in Wien <sup>1)</sup>

Für die Ermittlung des Schwungrades für ein System Kolbenkraftmaschine–Arbeitsmaschine, bei dessen stationärem Lauf ein gegebener Ungleichförmigkeitsgrad nicht überschritten werden darf, wurde ein neues graphisches Verfahren gesucht. Es sollte möglichst geringen Zeichenaufwand erfordern, jedoch keine wesentlichen Näherungsannahmen verwenden, die die Zuverlässigkeit der Resultate beeinträchtigen könnten.

Eine Kolbenkraftmaschine sei mit einer beliebigen Arbeitsmaschine zwangsläufig gekoppelt. Wir untersuchen den stationären Lauf dieses Systems. Die gesamte kinetische Energie  $T$  läßt sich in der Form anschreiben

$$T = E_I(\vartheta_I) \frac{\dot{\vartheta}_I^2}{2} + E_{II}(\vartheta_{II}) \frac{\dot{\vartheta}_{II}^2}{2} \dots \dots \dots (1)$$

( $\vartheta_I$  bzw.  $\vartheta_{II}$  Drehwinkel der Motorwelle bzw. der Welle der Arbeitsmaschine,  $E_I$  bzw.  $E_{II}$  Getriebe-funktionen von Motor bzw. Arbeitsmaschine). Statt der beiden Drehwinkel führen wir eine Winkelvariable  $\varphi$  so ein, daß sie während der vollen Systemperiode um  $2\pi$  wächst. Wir stellen  $E_I$  und  $E_{II}$  als Funktionen von  $\varphi$  dar und teilen beide in je zwei Anteile:

$$E_I(\varphi) = \Theta_I + \Delta E_I(\varphi), \quad E_{II}(\varphi) = \Theta_{II} + \Delta E_{II}(\varphi) \dots \dots \dots (2)$$

$\Theta_I$  bzw.  $\Theta_{II}$  die zu ermittelnden Trägheitsmomente der zusätzlichen Schwungmassen am Motor bzw. an der Arbeitsmaschine,  $\Delta E_I(\varphi)$  und  $\Delta E_{II}(\varphi)$  sind nunmehr als bekannt voranzusetzen). Aus (1) und (2) erhält man:

$$T = [\Theta + \Delta E(\varphi)] \frac{\omega^2}{2} \dots \dots \dots (3)$$

mit

$$\omega = \dot{\vartheta}_I, \quad \Theta = \Theta_I + \frac{1}{u^2} \Theta_{II}, \quad \Delta E(\varphi) = \Delta E_I(\varphi) + \frac{1}{u^2} \Delta E_{II}(\varphi) \dots \dots \dots (4),$$

Übersetzungsverhältnis  $u = \dot{\vartheta}_I / \dot{\vartheta}_{II}$ .

Bei einer Verdrehung des Systems wird von diesem die Arbeit geleistet:

$$dA = M(\vartheta_I) d\vartheta_I - W(\vartheta_{II}) d\vartheta_{II} \dots \dots \dots (5).$$

Dabei ist  $M(\vartheta_I)$  das Moment an der Motorwelle, das man erhält, wenn man die auf die Kolben wirkenden Gaskräfte, Reibungen und evtl. Schwerkkräfte auf das Wellenmittel reduziert („effektives Drehmoment“),  $W(\vartheta_{II})$  das analog gebildete Moment für die Welle der Arbeitsmaschine. Durch Einführen der Winkelkoordinate  $\varphi$  geht (5) über in

$$dA = k_I \left[ M(\varphi) - \frac{1}{u} W(\varphi) \right] d\varphi \equiv Q(\varphi) d\varphi \dots \dots \dots (6)$$

( $k_I \dots$  Anzahl der Drehungen der Motorwelle in der vollen Systemperiode,  $Q \dots$  „Effektives Ungleichförmigkeitsmoment“).

Der Arbeitssatz für das System lautet in differentieller Form

$$d \left\{ [\Theta + \Delta E(\varphi)] \frac{\omega^2}{2} \right\} = dA = Q(\varphi) d\varphi \dots \dots \dots (7).$$

<sup>1)</sup> Der vorliegende Bericht bezieht sich auf eine Arbeit, die gemeinsam mit G. Heinrich, Wien, durchgeführt wurde: Ein neues graphisches Verfahren zur Schwungradermittlung bei Kolbenmaschinen; Maschinenbau u. Wärmewirtschaft, 8. Jg., Heft 9, 1953, S. 241–247 Springer-Verlag, Wien.



Wir bezeichnen die Werte von  $\varphi$ , die den Extremwerten von  $\omega$  und  $T$  entsprechen in folgender Weise:

$$\omega_{\min} \dots \varphi_1, \quad \omega_{\max} \dots \varphi_2, \quad T_{\min} \dots \bar{\varphi}_1, \quad T_{\max} \dots \bar{\varphi}_2.$$

Die Integration von (7) zwischen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ergibt

$$[\Theta + \Delta E(\varphi_2)] \frac{\omega_{\max}^2}{2} - [\Theta + \Delta E(\varphi_1)] \frac{\omega_{\min}^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Q(\varphi) d\varphi \quad \dots \dots \dots (8).$$

Für  $\omega_{\min}$  und  $\omega_{\max}$  erhält man Näherungswerte durch den üblichen Ansatz

$$\omega_{\min}^* = \omega_m \left(1 - \frac{\delta}{2}\right), \quad \omega_{\max}^* = \omega_m \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \quad \dots \dots \dots (9)$$

mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_m = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \omega(t) dt$$

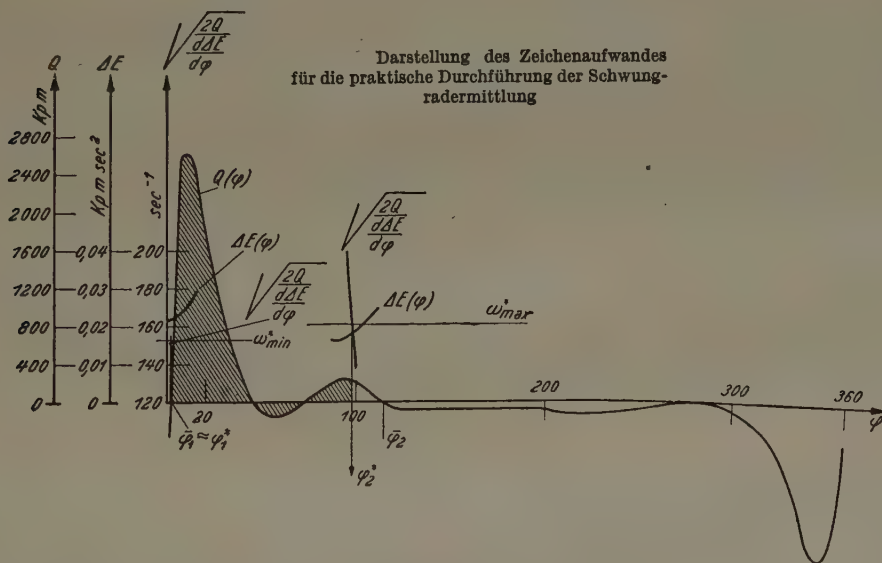
und dem zulässigen Ungleichförmigkeitsgrad

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m}$$

(\* bedeutet hier und im Folgenden Näherungswerte).

Zur Ermittlung der Stellen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  suchen wir vorerst die Stellen  $\bar{\varphi}_1$  und  $\bar{\varphi}_2$  auf. Dort hat, wie (7) zeigt, die Funktion  $Q(\varphi)$  Nullstellen. Wegen der Veränderlichkeit von  $E_I$  und  $E_{II}$  werden die Stellen  $\varphi_1$  und  $\bar{\varphi}_1$  bzw.  $\varphi_2$  und  $\bar{\varphi}_2$  nicht zusammenfallen, aber benachbart sein. Wir führen die Differentiation in (7) aus

$$\frac{d \Delta E(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2} + [\Theta + \Delta E(\varphi)] \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = Q(\varphi).$$



An den Stellen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ist die Ableitung  $d\omega/d\varphi = 0$ , somit ergibt sich

$$\omega_{\min}^* = \sqrt{\frac{2 Q(\varphi_1^*)}{\left(\frac{d \Delta E}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1^*}}}, \quad \omega_{\max}^* = \sqrt{\frac{2 Q(\varphi_2^*)}{\left(\frac{d \Delta E}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_2^*}}} \quad \dots \dots \dots (10).$$

Zur Ermittlung der Stellen  $\varphi_1^*$  bzw.  $\varphi_2^*$  (Näherungswerte für  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$ ) hat man also nur in den an die Stellen  $\bar{\varphi}_1$  bzw.  $\bar{\varphi}_2$  anschließenden kurzen Intervallen, in denen  $Q(\varphi)$  und  $d \Delta E/d\varphi$  gleiches

Vorzeichen besitzen, die Kurvenstücke  $\sqrt{\frac{2 Q(\varphi)}{d \Delta E(\varphi)}}$  zu zeichnen und mit den Werten  $\omega_{\min}^*$

bzw.  $\omega_{\max}^*$  zum Schnitt zu bringen. Im übrigen Bereich braucht man die Getriebefunktionen nicht zu ermitteln, ein Umstand, der große Arbeitsersparnis bedeutet. Die Fläche unter der

Kurve  $Q(\varphi)$  zwischen den Stellen  $\varphi_1^*$  und  $\varphi_2^*$  wird planimetriert und nun kann der Wert  $\Theta^*$  aus Gl. (8) ermittelt werden. Bei Verwendung von Schwungmassen mit dem so ermittelten Trägheitsmoment  $\Theta^*$  wird sich ein Ungl. Grad  $\delta^*$  einstellen, der von dem vorgegebenen Wert  $\delta$  maximal um  $\delta^2$  abweichen kann <sup>2)</sup>, eine Genauigkeit, die wohl für fast alle praktischen Zwecke ausreichen wird. Im Bedarfsfalle können alle mit Stern versehenen Werte nach einem in der zitierten Arbeit <sup>1)</sup> angegebenen Verfahren kontrolliert und durch Iteration beliebig genau verbessert werden.

Die angegebene Methode ist auch für den Fall verwendbar, daß  $\Theta$  gegeben und  $\delta$  gesucht ist.

Das Bild zeigt die Durchführung des Verfahrens für ein System Kolbenmotor-Kolbenkompressor (Viertakt-Einzyliermotor 1500 Umdr./min, einfachwirkender Einzylinder-Kolbenkompressor, Übersetzungsverhältnis  $u = 1/2$ , zuläss. Ungl. Grad  $\delta = 0,05$ ) und stellt gleichzeitig den nötigen Zeichenaufwand dar. Die zu planimetrierende Fläche ist schraffiert.

Eine parallel zu obigem Verfahren ausgearbeitete rein rechnerische Methode wurde kurz erwähnt <sup>3)</sup>.

## Zur Stabilität von Reglern mit Nachlaufzeit

Von Wolfgang Hahn in Braunschweig

Es sei die Gleichung des Regelsystems auf die Gestalt<sup>1)</sup>

$$\ddot{Y}(t) + 2k\dot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) - aY(t - \tau) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

gebracht. Partiallösungen von (1) sind die Funktionen  $e^{\lambda_i t}$ , wobei  $\lambda_i$  eine Wurzel der transzendenten Gleichung

$$A(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 - ae^{-\lambda\tau} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

ist. In der einschlägigen Literatur wird als notwendige und hinreichende Bedingung für die Stabilität des durch eine Gleichung vom Typ (1) beschriebenen Systems angesehen, daß alle  $\lambda_i$  negative Realteile haben, ohne daß dies Kriterium bisher mathematisch exakt begründet worden ist. Zum Beweis muß man folgendes zeigen: 1. Jede Lösung von (1) läßt sich in eine Reihe der Gestalt  $\sum C_i e^{\lambda_i t}$  entwickeln. 2. Die Reihen konvergieren auf der ganzen positiven  $t$ -Achse gleichmäßig. (Da bei speziellen Anfangsbedingungen einzelne der Koeffizienten  $C_i$  verschwinden können, ist die fragliche Bedingung streng genommen nur hinreichend.)

Für die Standardlösung der Regeltechnik, die durch die Anfangswerte  $\tilde{Y}(t) = 0$  ( $t \leq 0$ ),  $\dot{\tilde{Y}}(0) = 1$  gekennzeichnet ist, erhält man aus (1) durch L a p l a c e-Transformation

$$\tilde{y}(s) A(s) = 1$$

und daraus durch die komplexe Umkehrformel und Berechnung des Integrals mit Hilfe des Residuensatzes zunächst formal

$$\tilde{Y}(t) \sim \sum_i \frac{e^{\lambda_i t}}{A'(\lambda_i)} \dots \dots \dots (3).$$

(Dabei ist von etwaigen Mehrfachnullstellen, die höchstens in endlicher Anzahl auftreten können, abgesehen.) Drückt man die Exponentialgrößen  $e^{\lambda_i t}$  mittels (2) durch die Potenzen von  $\lambda_i$  aus und beachtet, daß  $A(\lambda)$  eine ganze Funktion von der Ordnung 1 ist, so zeigt sich, daß die Reihe (3) und ihre zwei ersten formalen Ableitungen absolut konvergieren. Daraus folgt, daß (3) eine Lösung ist; daß sie die „richtigen“ Anfangswerte hat, muß man durch direkte Berechnung zeigen. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe ist die geforderte gleichmäßige Konvergenz gesichert. — Aus der Standardlösung läßt sich in üblicher Weise durch Differentiation bzw. Faltung die Lösung der inhomogenen Gleichung mit beliebigen Anfangswerten gewinnen.

Der Beweis läßt sich in gleicher Weise für Gleichungen von höherer Ordnung führen, sofern die höchste auftretende Ableitung  $Y^{(n)}(t)$  nicht mit Verzögerungen behaftet ist. Tritt ein Glied  $Y^{(n-1)}(t - \tau)$  auf, so muß man in (3) die konjugiert komplexen Glieder zusammenfassen.

<sup>2)</sup> R. v. Mises, Die Ermittlung der Schwungmassen im Schubkurbelgetriebe. Z. Österr. Ing. u. Arch. V. 58 (1906), S. 591.

<sup>3)</sup> K. Desoyer u. A. Slibar, Die rechnerische Ermittlung des Ungleichförmigkeitsgrades bei Kolbenmaschinen. Österr. Ing.-Arch. VII, S. 100 (1953).

<sup>1)</sup> Vgl. L. Collatz, Zur Stabilität von Regelungen mit Nachlaufzeit. Z. angew. Math. Mech. 25/27, 60—62 (1947), Gl. (2).



## Auswuchten elastischer Rotoren

Von A. Meldahl in Kopenhagen

Einen starren Rotor, d. h. einen Rotor der weit unterhalb seiner ersten kritischen Drehzahl läuft, kann man bekanntlich immer dadurch auswuchten, daß man in zwei beliebigen Ebenen senkrecht zur Achse zusätzliche Massen anbringt bis die Drehachse zu einer Hauptträgheitsachse des Rotors wird.

Ist der Rotor elastisch, so genügt dies nicht; denn durch die unbekannte Unwucht und die zusätzlichen Massen können Biegemomente entstehen, die den Rotor so stark verbiegen, daß er bei voller Drehzahl ganz aus dem Gleichgewicht kommt, trotzdem er bei niedriger Drehzahl vollkommen ausgewuchtet war.

Mit den Orthogonalitätsbedingungen, welche die elastischen Linien bei den verschiedenen kritischen Drehzahlen miteinander verbinden, kann ein besseres Verfahren angegeben werden.

Es sei:

$y_m(x)$  Elastische Linie des Rotors bei der kritischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m$ ,

$y_n(x)$  Elastische Linie des Rotors bei der kritischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_n$ ,

$m(x)$  Rotormasse je Längeneinheit

so gilt die Bedingung:

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^l y_m \cdot y_n \cdot m \cdot dx = 0$$

und daraus folgt für das Integral:

$$\int_0^l y_m \cdot y_n \cdot n \cdot dx \begin{matrix} > 0 & m = n \\ = 0 & m \neq n \end{matrix}$$

Das Integral läßt sich wie folgt deuten, wenn man es z. B. mit  $\omega_m^2$  multipliziert:

*Die Arbeit, welche die Fliehkräfte  $\omega_m^2 y_n m$  auf die Durchbiegung  $y_m$  ausüben, ist stets Null.*

Daraus folgt, daß eine zusätzliche Massenmomentverteilung, welche mit  $y_n m$  proportional ist ausschließlich auf die kritische Drehzahl  $n_n$  einen Einfluß haben kann, die übrigen kritischen Drehzahlen jedoch überhaupt nicht beeinflußt.

Daraus ergibt sich das folgende Auswuchtverfahren für elastische Rotoren. Man bringt den Rotor bei der ersten kritischen Drehzahl durch eine zusätzliche Massenmomentverteilung, welche zu  $y_1 \cdot m$  proportional ist, ins Gleichgewicht. Nachdem dies erreicht ist, geht man auf die zweite kritische Drehzahl und wuchtet den Rotor durch eine zu  $y_2 \cdot m$  proportionale zusätzliche Massenmomentverteilung aus. Durch diese zweite Massenmomentverteilung kann das Gleichgewicht bei der ersten kritischen Drehzahl nicht gestört werden, wie die Orthogonalitätsbedingung es zeigt. Man geht dann auf die dritte kritische Drehzahl usw.

Da die Durchbiegung des Rotors bei beliebiger Drehzahl als Summe der kritischen Durchbiegungen — mit von der Drehzahl abhängigen Konstanten multipliziert — dargestellt werden kann, so wird ein Rotor, der bei sämtlichen kritischen Drehzahlen ausgewuchtet ist, auch bei beliebiger Drehzahl ausgewuchtet sein.

Praktisch genügt es, den Rotor bei denjenigen kritischen Drehzahlen auszuwuchten, die unterhalb der zulässigen Höchstdrehzahl liegen. Eventuell kann man bei der Höchstdrehzahl noch mit derjenigen Massenverteilung, welche der nächsthöheren kritischen Drehzahl entspricht, nachwuchten.

Da praktisch nur wenige kritische Drehzahlen unterhalb der Höchstdrehzahl liegen, ist es streng genommen nicht nötig, die theoretisch geforderten Massenmomentverteilungen einzuhalten.

Es genügt pro kritische Drehzahl grundsätzlich eine Auswuchtebene; bei zwei kritischen Drehzahlen unterhalb der Höchstdrehzahl, und Nachwuchten bei der Höchstdrehzahl also drei Ebenen, die an sich beliebig gewählt werden können, praktisch jedoch so weit auseinander liegen sollten wie nur möglich.

Die Durchbiegungen der drei kritischen Formen in den drei Ebenen seien

$$y_{11} \ y_{12} \ y_{13}$$

$$y_{21} \ y_{22} \ y_{23}$$

$$y_{31} \ y_{32} \ y_{33}$$

der erste Index bezeichnen die kritische Drehzahl der zweite die Auswuchtebene.

Die  $3 \times 3$  Massenmomente, die für das Auswuchten bei den drei kritischen Drehzahlen nötig sind, ergeben sich dann aus den folgenden Gleichungen:

Für die erste kritische Drehzahl:

$$\begin{aligned} M_{11} y_{11} + M_{12} y_{12} + M_{13} y_{13} &= a \\ M_{11} y_{21} + M_{12} y_{22} + M_{13} y_{23} &= 0 \\ M_{11} y_{31} + M_{12} y_{32} + M_{13} y_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Für die zweite kritische Drehzahl:

$$\begin{aligned} M_{21} y_{11} + M_{22} y_{12} + M_{23} y_{13} &= 0 \\ M_{21} y_{21} + M_{22} y_{22} + M_{23} y_{23} &= b \\ M_{21} y_{31} + M_{22} y_{32} + M_{23} y_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Für die dritte kritische Drehzahl:

$$\begin{aligned} M_{31} y_{11} + M_{32} y_{12} + M_{33} y_{13} &= 0 \\ M_{31} y_{21} + M_{32} y_{22} + M_{33} y_{23} &= 0 \\ M_{31} y_{31} + M_{32} y_{32} + M_{33} y_{33} &= c. \end{aligned}$$

Die Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind an sich beliebig, und können z. B. durch 1 ersetzt werden.

Es ist vermutlich am zweckmäßigsten, in frei beweglichen, federnd aufgehängten Lagern auszuwuchten. Denn in solchen Lagern entsprechen die beiden ersten kritischen Drehzahlen dem üblichen „statischen“ und „dynamischen“ Auswuchten. Diese beiden Auswuchtungen sind aber unbedingt notwendig, bevor man es überhaupt wagen kann einen größeren Rotor auf volle Drehzahl zu bringen. Auf freien Lagern schließt sich das „elastische“ Auswuchten dann zwanglos an; beim elastischen Auswuchten auf festen Lagern ist dies nicht der Fall.

Die elastischen Linien der kritischen Drehzahlen kann man sich heute durch ein elektrisches Analogie-Gerät oder mit Hilfe einer elektrischen Rechenmaschine verhältnismäßig einfach verschaffen.

## Gesetzmäßigkeiten und Grenzwerte von Drehschwingungsfrequenzen

Von H. Neuber in Dresden

Während für die kritischen Drehzahlen biegesteifer Wellen mit Schwungmassen einfache Beziehungen für obere und untere Schranken bekannt sind (u. a. die Formel von D u n k e r l e y), kennt man bisher solche Grenzwerte für das Torsionsschwingungsproblem noch nicht. Für überschlägige Rechnungen mit wenig Zeitaufwand, sowie für Kontrollmöglichkeiten bei der genauen Berechnung von Drehschwingungssystemen mit beliebig vielen Massen ist aber die Kenntnis der Frequenzschranken von großem Vorteil. Durch Einführung der elastischen Torsionsmomente

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	
$\Delta =$	$\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} - \frac{\omega^2}{c_1}$	$\frac{1}{\theta_2}$	0	0	0	0	0	..
	$\frac{1}{\theta_2}$	$\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3} - \frac{\omega^2}{c_2}$	$\frac{1}{\theta_3}$	0	0	0	0	..
	0	$\frac{1}{\theta_3}$	$\frac{1}{\theta_3} + \frac{1}{\theta_4} - \frac{\omega^2}{c_3}$	$\frac{1}{\theta_4}$	0	0	0	..
	0	0	$\frac{1}{\theta_4}$	$\frac{1}{\theta_4} + \frac{1}{\theta_5} - \frac{\omega^2}{c_4}$	$\frac{1}{\theta_5}$	0	0	..
	0	0	0	$\frac{1}{\theta_5}$	$\frac{1}{\theta_5} + \frac{1}{\theta_6} - \frac{\omega^2}{c_5}$	$\frac{1}{\theta_6}$	0	..
	0	0	0	0	$\frac{1}{\theta_6}$	$\frac{1}{\theta_6} + \frac{1}{\theta_7} - \frac{\omega^2}{c_6}$	$\frac{1}{\theta_7}$	..
	0	0	0	0	0	$\frac{1}{\theta_7}$	$\frac{1}{\theta_7} + \frac{1}{\theta_8} - \frac{\omega^2}{c_7}$	..
	..	..	..	..	..	..	..	..

Bild 1. Die Frequenzdeterminante bei Verwendung der elastischen Torsionsmomente als Unbekannte



anstelle der Drehwinkel als Unbekannte wird eine Differential-Differenzgleichung aufgestellt, deren Lösung eine besonders übersichtliche Determinante liefert (Bild 1). Die weitere Untersuchung dieser Determinante, deren Verschwinden die Frequenzgleichung gibt, läßt anschauliche Zusammenhänge des betrachteten Schwingungssystems mit einer Reihe von Ersatzsystemen erkennen, welche aus dem Hauptsystem durch teilweise Erstarrung (Bild 2) oder teilweise Wegnahme von Steifigkeiten (Bild 3) herstellbar sind. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, die Koeffizienten der Gleichung  $(n-1)$ -ten Grades für das Frequenzquadrat durch die Eigenfrequenzen der Ersatzsysteme darzustellen.

$$\Delta = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots = 0$$

$$a_0 = D_{1,n} = \frac{\sum_{h=1}^n \Theta_h}{\prod_{h=1}^n \Theta_h} \quad \begin{array}{c} \sum_{h=1}^n \Theta_h \\ \hline c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = \infty \end{array} \quad (\text{Starrer Körper})$$

$$a_2 = \sum_{h=1}^{n-1} b_h = D_{1,n} \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{\bar{\omega}_h^2} \quad \begin{array}{c} \sum_{k=1}^h \Theta_k \quad \sum_{k=h+1}^n \Theta_k \\ \hline c_h \end{array} \quad (2\text{-Massen-System})$$

$$a_4 = \sum_{h=1}^{n-2} \sum_{k=h+1}^{n-1} b_{hk} = D_{1,n} \sum_{h=1}^{n-2} \sum_{k=h+1}^{n-1} \frac{1}{\bar{\omega}_{hk,1}^2 \bar{\omega}_{hk,2}^2} \quad \begin{array}{c} \sum_{l=1}^h \Theta_l \quad \sum_{l=h+1}^k \Theta_l \quad \sum_{l=k+1}^n \Theta_l \\ \hline c_h \quad c_k \end{array} \quad (3\text{-Massen-System})$$

Bild 2. Zurückführung der Koeffizienten der Frequenzgleichung auf Eigenfrequenzen von Ersatzsystemen, die durch teilweise Erstarrung aus dem Hauptsystem hervorgehen

$$\Delta = \frac{(-1)^n \omega^{2n-2}}{\prod c_h} \left[ 1 - \frac{g_2}{\omega^2} + \frac{g_4}{\omega^4} - \dots \right]$$

$$g_2 = \sum \bar{\omega}_h^2 \quad \begin{array}{c} \hline c_h \\ \hline \Theta_h \quad \Theta_{h+1} \end{array} \quad \boxed{\bar{\omega}_h}$$

$$g_4 = \sum \sum \bar{\omega}_{hk,1}^2 \bar{\omega}_{hk,2}^2 \quad \left\{ \begin{array}{c} \hline c_h \quad \dots \quad c_k \\ \hline \Theta_h \quad \Theta_{h+1} \quad \Theta_k \quad \Theta_{k+1} \\ \hline \text{oder} \\ \hline c_h \quad c_{h+1} \\ \hline \Theta_h \quad \Theta_{h+1} \quad \Theta_{h+2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \boxed{\bar{\omega}_{hk,1}} \\ \boxed{\bar{\omega}_{hk,2}} \end{array}$$

Bild 3. Inverse Auflösung der Determinante und Darstellung der zugehörigen Koeffizienten durch Eigenfrequenzen von Ersatzsystemen, die durch teilweise Wegnahme von Steifigkeiten entstehen

So läßt sich eine Reihe von Sätzen für den Zusammenhang der Eigenfrequenzen des Hauptsystems mit denen der Ersatzsysteme aufstellen.

Insbesondere liefert die Beziehung

$$\sum \frac{1}{\bar{\omega}_h^2} = \sum \frac{1}{\bar{\omega}_h^2} \dots \dots \dots (1)$$

einen unteren Grenzwert für die Frequenz der Grundschwingung:

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{1}{\sum \frac{1}{\bar{\omega}_h^2}}} < \omega_1 \dots \dots \dots (2).$$

Für das Torsionsschwingungsproblem wird hierdurch ein Zusammenhang aufgedeckt, der dem Sachverhalt der Dunkerley'schen Formel für kritische Drehzahlen genau analog ist. Andererseits besteht die Beziehung,

$$\sum \omega_h^2 = \sum \bar{\omega}_h^2 \quad (3)$$

welche einen oberen Grenzwert für die höchste Eigenfrequenz liefert:

$$\omega_{n-1}^* = \sqrt{\sum \bar{\omega}_h^2} > \omega_{n-1} \quad (4).$$

Durch Verschärfung eines Satzes über die Erhöhung der Eigenfrequenzen durch Massenverringerung bzw. Steifigkeitserhöhung gelingt es ferner, auch obere Schranken für die Grundfrequenz und untere Schranken für die höchste Frequenz anzugeben, sowie — durch Vergleich der Koeffizienten höherer Potenzen — eine Reihe oberer und unterer Schranken für die übrigen Frequenzen.<sup>1)</sup>

## Eine Verallgemeinerung des Holzer-Verfahrens zur Schwingungsberechnung von Stabwerken

Von E. Pestel in Hannover

Obwohl es naheliegt, den Grundgedanken von Holzer zur Berechnung der Torsionsschwingungen von Maschinenwellen auch auf die Ermittlung der Längs- und Biegeschwingungen von Stäben anzuwenden, hat erst vor 10 Jahren Myklestad für den Fall reiner Biegeschwingungen eine dem Holzer-Verfahren verwandte Rechenmethode entwickelt. Im folgenden soll nun die Vorgehensart von Holzer auf allgemeine Stabwerke mit diskreter Massen- und Massenträgheitsmomentenbelegung angewendet werden. Dabei braucht der Schwerpunkt der Massen nicht auf der elastischen Achse der Federstäbe zu liegen, die selbst als masselos angenommen werden und gleichzeitig Längs- und Querkräfte sowie Biege- und Torsionsmomente aufnehmen können. Wenn die Eigenschaften der Massen und Federn bekannt sind und aus dem interessierenden Frequenzbereich eine Frequenz vorgegeben wird, ist es möglich, aus der Kenntnis der 6 Auslenkungen und der entsprechenden 6 Schnittgrößen, sagen wir unmittelbar rechts von der Masse  $r$  die entsprechenden 12 Größen unmittelbar rechts von der Masse  $r+1$  zu berechnen (vgl. Bild 1); denn jede der 12 Größen an der Stelle  $r+1$  läßt sich dann als Linearkombination

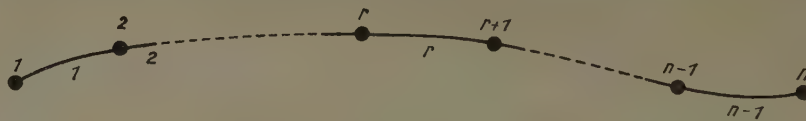


Bild 1

der 12 an der Stelle  $r$  gefundenen Größen ausdrücken. In übersichtlicher Weise kann man somit die Übertragung der 6 Auslenkungs- und der 6 Schnittgrößen von einer Stelle  $r$  zum folgenden Punkt  $r+1$  als Produkt einer quadratischen Matrix und einer Spaltenmatrix darstellen.

Wir können also bei einem freien mit diskreten Massen belegten Stabzug (vgl. Bild 1), die aus 12 Elementen bestehende Spaltenmatrix  $u_n$  durch folgende Matrizenmultiplikation bestimmen.

$$u_n = \mathcal{U}_{n-1} \mathcal{U}_{n-2} \dots \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 u_1 = \mathcal{B} \cdot u_1 \quad (1).$$

Darin stelle die quadratischen Matrizen  $\mathcal{U}_r$  die Feder- und Masseigenschaften jedes einzelnen Abschnittes  $r$  dar. Da an jedem Ende eines solchen räumlich beanspruchten Stabzuges i. a. 6 in den 12 Größen homogene Randbedingungen gegeben sind, können von den 12 Größen, die unmittelbar rechts von der äußersten linken Masse vorhanden sind, 6 durch die übrigen 6 ausgedrückt werden. Aufgrund der Tatsache, daß sich am rechten Ende des Stabzuges die vorerwähnten 12 Größen als Linearkombinationen der 6 am Anfang frei wählbaren Größen ergeben, liefern die hier zu erfüllenden 6 Randbedingungen ein System von 6 homogenen linearen Gleichungen mit den 6 an der Stelle 1 frei gewählten Größen als Unbekannten, die nur dann von Null verschieden sein können, wenn die Nennerdeterminante dieses Gleichungssystems verschwindet. Der Wert der Nennerdeterminante ist aber eine Funktion der eingangs der Rechnung gewählten Frequenz. Nur, wenn zufällig eine Eigenfrequenz in die Rechnung eingeführt wird, ergibt sich die Nennerdeterminante zu Null. Man berechnet nun in dem interessierenden Frequenzbereich die Nennerdeterminante für einige Frequenzen und findet durch Interpolation die gesuchten Nulldurchgänge.

Bei verzweigten Stabwerken sind die Verhältnisse nicht so einfach wie bei dem Stabzug des Bildes 1. Bei solchen Stabwerken erweist es sich als notwendig, zunächst das Stabwerk in einzelne freie oder federgefesselte Stabzüge zu zerschneiden. Die Schnittgrößen, welche die Wirkung

<sup>1)</sup> Eine ausführlichere Darlegung wird demnächst in der Zeitschrift „Ing.-Archiv“ veröffentlicht.



der abgeschnittenen auf den jeweils betrachteten Stabzug wiedergeben, sind dann als Unbekannte einzuführen. Die Forderung nach dem kinematischen Zusammenhalt des Stabwerkes und die Betrachtung des Axioms „*actio gleich reactio*“ liefern die zusätzlichen Gleichungen für die Bestimmung dieser Unbekannten. Es wurde im Vortrag gezeigt, daß die gesamte Schwingungsrechnung durch Verwendung geeigneter Matrizenschemata einheitlich programmiert werden kann, so daß mit der Durchführung der Zahlenrechnung entweder ungelernete Kräfte oder Rechenautomaten betraut werden können. Das Verfahren bietet ferner die Möglichkeit, in die Rechnung Parameter einzuführen. Auf diese Weise können z. B. die Möglichkeiten der Verlagerung von Eigenfrequenzen durch Änderung der elastischen Eigenschaften oder (und) der Massenbelegung im Hinblick auf eine gegebenenfalls notwendig werdende Verstimmung des Stabwerkes beurteilt werden.

Eine Variante des vorgetragenen Verfahrens erlaubt, mit einer einzigen Durchführung der Matrizenproduktbildung entsprechend (1) die dann allerdings sehr umfangreiche Determinante für die Berechnung des gesamten Frequenzspektrums des Stabwerkes aufzustellen.

Schließlich ist das Verfahren auch geeignet, erzwungene ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen von Stabwerken zu berechnen. Eine ausführliche Darstellung mit Beispielen ist in der Arbeit des Verfassers „Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Stabwerken“ in den Ende Sommer 1954 erscheinenden Abhandlungen der Wissenschaftlichen Gesellschaft der Technischen Hochschule Braunschweig gegeben.

## Bemerkungen zu einer Arbeit von Carathéodory

Von R. Gran Olsson in Trondheim

In einer Arbeit über die Bewegung eines Schlittens als ein nicht-holonomes System macht C. Carathéodory die Annahme, daß eine Kraft  $R$  in Querrichtung auf den Schlitten wirkt, d. h. senkrecht zur Bewegungsrichtung [1]. Die Bewegung möge in der Horizontalebene stattfinden, und die Reibung an den Kufen soll durch den Zug des Pferdes in entgegengesetzter Richtung dauernd aufgehoben sein.

Es dürfte indessen mit den tatsächlichen Verhältnissen besser übereinstimmen, wenn ein Moment statt einer Kraft am Schlitten wirkend angenommen wird. Es sei  $F$  die Kraft, die an den Kufen des Schlittens in Richtung der Bewegung von gleicher Größe wie die Reibung wirkt. Die Kufen mögen von verschiedener Rauigkeit angenommen sein, so daß die Reibungskräfte  $F_1$  und  $F_2$  an den Kufen verschieden sind und die Resultante  $(F_1 + F_2)$  eine zur Symmetrieachse des Schlittens exzentrische Lage hat, während der Zug des Pferdes  $F$  längs der Symmetrieachse wirken möge. Wenn nun  $F = F_1 + F_2$  ist, wirkt keine exzentrische Kraft sondern ein Moment  $M = F \cdot e$  am Schlitten, wo  $e$  die Exzentrizität der Resultante  $(F_1 + F_2)$  in bezug auf die Symmetrieachse des Schlittens bedeutet.

Dies Moment mag konstant angenommen werden, wonach die Geschwindigkeiten des Schlittenschwerpunktes sich durch einfache Integrationen ergeben. Der Hodograph der Bewegung ist durch Ellipsen (ähnlich wie bei der Planetenbewegung) gegeben. Die Schwerpunktsbahnen ergeben sich durch eine weitere Integration und zwar als F r e s n e l'sche Integrale, die bekanntlich tabuliert sind [2].

Eine andere Annahme für das Moment ist die der Proportionalität zwischen Moment und Geschwindigkeit in Richtung der Bahntangente des Schlittens. Dies bedeutet wiederum Proportionalität zwischen der Winkelbeschleunigung und der Geschwindigkeit. In diesem Falle ist eine Integration der Bewegungsgleichungen möglich, und zwar ergibt sich die Zeit durch ein elliptisches Integral, wo im Integranden die Winkelgeschwindigkeit als Veränderliche auftritt.

Durch Umkehrung ergibt sich dann die Winkelgeschwindigkeit als elliptische Funktion der Zeit. Mit Hilfe der Ausgangsgleichungen ergeben sich daraus die Komponenten der Geschwindigkeit.

Die Arbeit von Carathéodory kann übrigens auch nach der Richtung ergänzt werden, daß statt der seitlichen Geschwindigkeit  $v = 0$  diese konstant, aber von Null verschieden angenommen wird. Die Integration wird ähnlich wie bei Carathéodory elementar, und es lassen sich ähnliche Bahnen für die Bewegung des Schlittens konstruieren wie in der erwähnten Arbeit angegeben.

Verf. hofft bei einer späteren Gelegenheit ausführlicher auf die hier genannten Fälle einer Erweiterung der Carathéodory'schen Arbeit zurückzukommen.

[1] C. Carathéodory, Z. angew. Math. Mech. 13, 71–76 (1933). Siehe auch A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. I Mechanik, Leipzig 1947, 3. Auflage, S. 220–229.

[2] E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln mit Kurven und Tafeln. Leipzig u. Berlin 1938, S. 35

## Ein neues Strömungsgleichnis der Torsion

Von E. Pestel in Hannover

Im Gegensatz zu der bekannten hydrodynamischen Analogie von Thomson stellt das hier mitgeteilte Strömungsgleichnis eine mathematische Beziehung zwischen dem Verhalten einer viskosen Flüssigkeit und dem Torsionsverhalten eines prismatischen Stabes her. Dabei wird folgender Strömungsvorgang betrachtet.

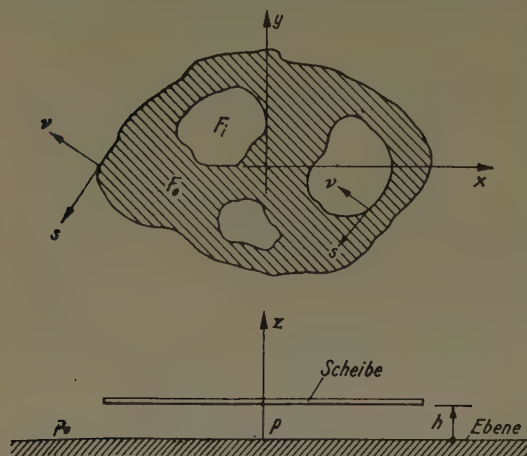


Bild 1

Eine Scheibe beliebigen Umrisses sei gelagert auf einer Flüssigkeitsschicht, deren Träger eine unendlich große Ebene ist (vgl. Bild 1). Scheibe und Ebene sind parallel zueinander. Wird bei einer Relativbewegung längs ihrer Normalen die Spalthöhe  $h$  zwischen Scheibe und Ebene z. B. verringert, so wird Flüssigkeit aus der Schicht zwischen Scheibe und Ebene herausgedrückt. Dadurch entsteht in dem Spalt ein i. a. von Ort zu Ort verschiedener Überdruck  $p$  gegenüber dem Druck  $p_0$  in der Flüssigkeit außerhalb der Scheibe. Es läßt sich nun u. a. zeigen, daß die Kraft, welche die beschriebene Bewegung der Scheibe hervorbringt, dem Drillmoment zugeordnet werden kann, das einen prismatischen

Stab von einem Querschnitt gleich dem Umriss der Scheibe verdreht.

Unter den Voraussetzungen der St. Venant'schen Theorie wird das Torsionsverhalten eines prismatischen Stabes, dessen Querschnitt im allgemeinen Fall mehrfach zusammenhängend ist, durch folgende Gleichungen hinreichend beschrieben.

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \dots \quad (1),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\vartheta \quad \dots \quad (2),$$

$$\varphi_{R_i} = k_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad \dots \quad (3),$$

$$M_z = 2 \iint \varphi \, dx \, dy - 2k_0 F_0 + 2 \sum_{i=1}^n k_i F_i \quad \dots \quad (4),$$

$$\oint_{R_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, ds = 2G\vartheta F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \quad (5).$$

Die darin verwendeten Bezeichnungen bedürfen wohl im Hinblick auf Bild 1 keiner weiteren Erläuterung. Diesen Gleichungen des Torsionsproblems können wir unter den Voraussetzungen für die sogenannte schleichende Strömung folgende Gleichungen für das soeben beschriebene Strömungsproblem gegenüberstellen. Hierin bedeuten  $q$  die in der Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsmenge, deren Strömungsrichtung jeweils durch den Index gekennzeichnet ist,  $\mu$  die absolute Zähigkeit der Flüssigkeit, während die Bedeutung der übrigen Bezeichnungen dem Bild 1 zu entnehmen ist.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu}{h^3} q_x; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\mu}{h^3} q_y \quad \dots \quad (1'),$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -\dot{h} \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3} \dot{h} \quad \dots \quad (2'),$$

$$p_{R_i} = \kappa_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, p) \quad \dots \quad (3'),$$

$$P = \iint p \, dx \, dy - \kappa_0 F_0 + \sum_{i=1}^n \kappa_i F_i \quad \dots \quad (4'),$$

$$\oint_{R_i} q_\nu \, ds = \dot{h} F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \quad (5').$$



Wir können also folgende Größen der Torsionsaufgabe und des Strömungsproblems einander zuordnen.

$$\begin{aligned} 2\varphi &\rightarrow p \\ -2G\vartheta &\rightarrow \frac{6\mu}{h^3}h \\ 2k_i &\rightarrow \kappa_i \\ M_z &\rightarrow P \\ \tau_{zy} &\rightarrow \frac{6\mu}{h^3}q_x; & \tau_{zx} &\rightarrow -\frac{6\mu}{h^3}q_y. \end{aligned}$$

Es ist beabsichtigt, dieses Strömungsgleichnis experimentell zu verwirklichen, zumal die Aussicht besteht, auf diese Weise die Drillsteifigkeit von Stäben mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt auf dem Versuchswege besonders einfach zu bestimmen. Darüber hinaus bietet aber das Strömungsgleichnis wegen seiner Anschaulichkeit die gleichen Vorteile in der gedanklichen Bewältigung gewisser Torsionsprobleme wie das bekannte *P r a n d t l*sche Seifenhautgleichnis und die eingangs erwähnte hydrodynamische Analogie von *T h o m s o n*.

## Das d'Alembertsche Prinzip in Motorsymbolik und seine Anwendung auf Stoßprobleme

Von *W. Ra her* in Wien

Im Rahmen der Motorrechnung<sup>1)</sup> geht die reaktionskräftefreie Behandlung eines nicht-dissipativen Systems von  $n$  starren Körpern, das bestimmten Bedingungen unterliegt, vom d'Alembertschen Prinzip in *L a g r a n g e*scher Fassung aus<sup>2)</sup>

$$\sum_{K=1}^n \left( \frac{d\mathfrak{F}_K}{dt} - \mathfrak{R}_K \right) \check{\mathfrak{G}}_K = 0 \quad \dots \quad (1).$$

Darin bedeutet  $\mathfrak{F}_K$  den Impulsmotor des  $k$ -ten Körpers,  $\mathfrak{R}_K$  die Schraube der auf ihn wirkenden eingepprägten Kräfte und  $\check{\mathfrak{G}}_K$  eine virtuelle Lagenänderung dieses Körpers. Allgemein ist der Motor der Lagenvariation  $\check{\mathfrak{G}}_K = (\check{\mathfrak{B}}; \check{\mathfrak{B}})$  aus dem Geschwindigkeitsmotor  $\mathfrak{G} = (\mathfrak{B}; \mathfrak{B})$  durch Ersetzen der Differentialquotienten nach der Zeit durch solche nach einem Variationsparameter  $\varepsilon$  entstanden zu denken; die Zahl der in den  $\check{\mathfrak{G}}_K$  von (1) enthaltenen willkürlichen Variationsgrößen ist den Systembindungen entsprechend eingeschränkt.

Die Spezialisierung von (1) auf Momentankräfte führt auf

$$\sum_{K=1}^n (\mathfrak{F}'_K - \mathfrak{F}_K - \mathfrak{S}_K) \check{\mathfrak{G}}_K = 0 \quad \dots \quad (2).$$

$\mathfrak{F}'$  bezeichnet den Impulsmotor nach dem Stoß und  $\mathfrak{S}$  die Stoßschraube. Aus (2) sind leicht allgemeine Sätze aus der Theorie des Stoßes herleitbar (*C a r n o t*sche Theoreme für Systeme starrer Körper usw.), hier sei aber der praktische Ansatz von Stoßproblemen an Hand einfacher Beispiele gezeigt.

Für das in Bild 1 dargestellte holonome System, bei dem ein Körper gelenkig gelagert, der zweite mit diesem durch ein Kugelgelenk verbunden ist, folgt für die Lagenvariationen bezogen auf  $O_1$  bzw.  $O_2$

$$\check{\mathfrak{G}}_1 = (\check{\mathfrak{B}}_1; 0), \quad \check{\mathfrak{G}}_2 = (\check{\mathfrak{B}}_2; \check{\mathfrak{B}}_1 \times \mathfrak{R}).$$

Wird auf den oberen Körper ein Stoß ausgeführt, so gilt:  $\mathfrak{S}_1 = 0$  und  $\mathfrak{S}_2$  ist durch die Stoßkraft und ihr Moment bezüglich  $O_2$  bestimmt:  $\mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{S}, \mathfrak{M}_{O_2})$ . Nach Einsetzen in (2) und Ausführung der Produkte sind die Koeffizienten der beiden willkürlichen Vektorvariationsgrößen  $\check{\mathfrak{B}}_1$  und  $\check{\mathfrak{B}}_2$  Null zu setzen. Die so erhaltenen 6 Skalggleichungen bestimmen den Geschwindigkeitszustand nach dem Stoß.

Völlig analog gestaltet sich der Ansatz bei nichtholonomen Systemen, sofern nur die Bindungen linear in den Geschwindigkeiten sind. Bei nebenstehend skizzierten System, einem Räderpaar, das auf horizontaler Ebene reine Rollbewegungen ausführen soll, haben wir bei 5 Frei-

<sup>1)</sup> *R. v. Mises*, Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik. Z. angew. Math. Mech. 4, 1924.

<sup>2)</sup> *W. Ra her* und *F. Selig*, Die Verwendung der Motorsymbolik in der theoretischen Mechanik. Erscheint demnächst in den Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften.

heitsgraden (allgem. Koordinaten  $x, y, \psi$  und die beiden Rollwinkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ ) 3 nichtholonome Bedingungen. Sie lauten für eine spezielle Lage (stark ausgezogen):

$$dy + b d\psi + r d\varphi_1 = 0, \quad dy - b d\psi + r d\varphi_2 = 0, \quad dx = 0 \quad \dots \quad (3).$$

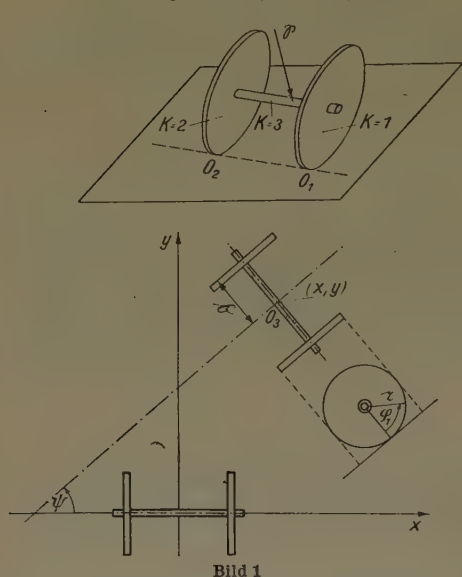


Bild 1

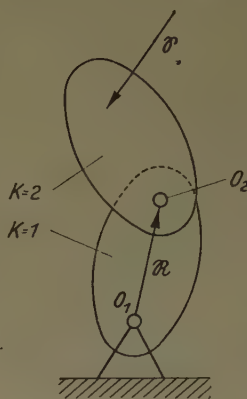


Bild 2

Somit wird  $\check{\mathfrak{G}}_1$  für  $O_1$  als Bezugspunkt

$$\check{\mathfrak{G}}_1 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varepsilon}, 0, \frac{d\psi}{\partial \varepsilon}; 0, 0, 0 \right)$$

oder nach (3), wenn wir als willkürliche Variationen die der beiden Rollwinkel wählen

$$\check{\mathfrak{G}}_1 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varepsilon}, 0, \frac{r}{2b} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varepsilon} \right); 0, 0, 0 \right),$$

desgleichen ist  $\check{\mathfrak{G}}_2$  und  $\check{\mathfrak{G}}_3$  durch  $\partial \varphi_1 / \partial \varepsilon$  und  $\partial \varphi_2 / \partial \varepsilon$  auszudrücken.

Führen wir auf die masselos gedachte Achse einen Stoß aus, und war das System vorher in Ruhe, so folgen nach Bildung der Produkte aus (2) durch Nullsetzen der Koeffizienten der beiden Winkelvariationen die Gleichungen,

$$T_A \dot{\varphi}_1' - \frac{r}{b} T_D \dot{\psi}' + \frac{r}{2} S_y + \frac{r}{2b} M_z = 0, \quad T_A \dot{\varphi}_2' + \frac{r}{b} T_D \dot{\psi}' + \frac{r}{2} S_y - \frac{r}{2b} M_z = 0$$

$T_A$  Trägheitsmoment eines Rades bezüglich der Geraden  $O_1 O_2$

$T_D$  bezüglich eines Raddurchmessers

$S_y$  Stoßkraft in Richtung  $y$

$M_z$  Moment der Stoßkraft um die  $z$ -Achse.

die gemeinsam mit (3) den Geschwindigkeitszustand nach dem Stoß festlegen. Wenn die Ebene nicht unendlich rauh ist, hat man nachträglich zu überprüfen, ob die nichtholonomen Bedingungen überhaupt physikalisch aufrechtzuerhalten sind. Aber auch dann wird man dieses und ähnliche Probleme zuerst einmal so ansetzen.

Falls die Stoßkräfte von vornherein nicht gegeben, sondern durch stoßende Körper auf das System übertragen werden, unterteilt man in Kompressions- und Restitutionsperiode und setzt die Innenprodukte der Schrauben der Ausgleichsgeschwindigkeiten in den Motor der gemeinsamen Stoßnormalen gleich. Auf diese Art gelangt man beim einpunktigen Stoß zweier Körper rascher zum Resultat, als bei Bestimmung des Betrages der Stoßkraft aus energetischen Überlegungen.

Auch die plötzliche Einführung sklonomer oder rheonomer Bindungen in ein System ist unmittelbar im Anschluß an (2) zu behandeln.

Somit sind durch (2) verschiedenste Stoßprobleme auf einen gemeinsamen Ansatz zurückgeführt, von dem man, besonders bei räumlichen Problemen, vorteilhaft ausgeht.

## Über automatisch gesteuerte Bewegungen

Von Stefan Schottlaender in Würzburg

In verschiedenen Zweigen der Technik treten bei Störung einer Hauptbewegung Schwingungen auf, deren Eigendämpfung den Forderungen nach schnellem Abklingen nicht genügt oder sogar fehlt. Um in diesen Fällen dennoch rasch auf kleine Amplituden zu kommen, hat man automatische Regelungen oder Steuerungen geschaffen, die die Störbewegung möglichst schnell zum Verschwinden bringen sollen. Solche Steuerungen können entweder stetig oder unstetig arbeiten. Die unstetig arbeitenden haben hierbei den Vorteil apparativer Einfachheit, größerer Robustheit und geringerer Herstellungskosten, ihr Nachteil dagegen ist, daß sie von sich aus neue unerwünschte Störungen am schwingenden System hervorrufen können, wenn man die Steuerparameter unzuweckmäßig auswählt. Aber noch eine dritte Möglichkeit hat sich in neuester Zeit in der Praxis als außerordentlich erfolgreich erwiesen: die „gemischte“ Steuerung<sup>1)</sup>. In hin-

<sup>1)</sup> W. H. Phillips, Graphical Solution of some Automatic-Control Problems involving Saturation Effects with Application to Yaw Dampers for Aircraft. NACA, TN 3034, Washington, USA, 1953.



reichender Nähe der Nullage arbeitet diese Steuerung stetig und linear, die so gesteuerte (eindimensionale) Bewegung wird beschrieben durch die Differentialgleichung (in der stets erreichbaren Normalform)

$$\ddot{x} + 2\zeta \dot{x} + x = -g \quad (1)$$

mit der Steuerfunktion

$$g = \alpha x + \beta \dot{x} \quad (g \equiv 0 \text{ ungesteuert}). \quad (2)$$

Überschreitet aber  $|g|$  oder  $|\dot{g}|$  einen gewissen Maximalbetrag, so verbleibt (z. B. als Folge von „Sättigungseffekten“) die steuernde Kraft bzw. ihre Änderungsgeschwindigkeit auf einem Höchstwert: an die Stelle von (2) tritt jetzt die Steuerfunktion

$$G = \pm G_0 \quad (\text{Stellungszuordnung}) \quad (3a)$$

oder

$$G = K_0 \pm V_0 t \quad (\text{Laufgeschwindigkeitszuordnung}) \quad (3b),$$

also eine nichtlineare unstetige Steuerung. Für in dieser Art gesteuerte Bewegungen kann es keinen geschlossenen analytischen Ausdruck (im Großen) geben, mit Ausnahme der periodischen Bewegungen. Diese lassen sich durch Aufstellung eines einfachen linearen Gleichungssystems vollständig berechnen und von ihnen ausgehend können dann auch Aussagen über allgemeine Bewegungen gemacht werden, insbesondere die für die Technik so wichtigen Stabilitätsaussagen.

Die Berechnung der periodischen Bewegungen einer „gemischten“ Steuerung nach (2) und (3b) erfolgt nun nach einer Methode von B i l h a r z<sup>2)</sup>. Die Steuerung verlaufe schon „gesättigt“, an die Stelle von  $g$  trete die tatsächliche periodische Steuerkraft (Periode  $2a$ ), ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ )

$$G(t) = \begin{cases} k_0 + V_0(t - 2\nu a) & \text{in } I_{1\nu}: 2\nu a \leq t \leq (2\nu + 1)a \\ k_0 - V_0(t - (2\nu + 2)a) & \text{in } I_{2\nu}: (2\nu + 1)a \leq t \leq (2\nu + 2)a \end{cases} \quad (4).$$

Lösungen von (1) mit der rechten Seite  $-G(t)$  sind dann

$$x(t) = \begin{cases} A_{1\nu} e^{\lambda_1 t} + B_{1\nu} e^{\lambda_2 t} - G(t) + 2\zeta V_0 & \text{in } I_{1\nu} \\ A_{2\nu} e^{\lambda_1 t} + B_{2\nu} e^{\lambda_2 t} - G(t) - 2\zeta V_0 & \text{in } I_{2\nu} \end{cases} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \quad (5).$$

Hierbei sind  $\lambda_1, \lambda_2$  die Lösungen der charakteristischen Gleichung. Durch die Forderungen

$$\left. \begin{aligned} x((2\nu + 1)a - 0) &= x((2\nu + 1)a + 0) \\ \dot{x}((2\nu + 1)a - 0) &= \dot{x}((2\nu + 1)a + 0) \\ x(2\nu a + 0) &= x((2\nu + 2)a - 0) \\ \dot{x}(2\nu a + 0) &= \dot{x}((2\nu + 2)a - 0) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Stetigkeit in den Schaltpunkten } t = (2\nu + 1)a, \\ \text{Periodizität in den Schaltpunkten } t = 2\nu a \end{array} \quad (6).$$

erhält man vier lineare Gleichungen, aus denen sich  $A_{1\nu}, A_{2\nu}, B_{1\nu}, B_{2\nu}$  eindeutig bestimmen lassen. Zu jedem  $a > 0$  gibt es daher eine und nur eine periodische Lösung der Periode  $2a$ , insbesondere gibt es zu jedem  $a > 0$  ein und nur ein Anfangswerttripel  $(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0)$  und zu verschiedenen Werten  $a_1, a_2$  auch verschiedene Anfangswerttripel.

Die Steuerung nach (4) muß nun aber noch der Steuervorschrift angepaßt werden, die besagt, daß die Umschaltunkte  $t = na$  der „gesättigten“ Steuerung auf der Steuerkurve (2) liegen müssen, d. h.  $k_0 = \alpha x_0 + \beta \dot{x}_0$  und  $k_0 + V_0 a = \alpha x(a) + \beta \dot{x}(a)$ , woraus folgt:

$$\alpha x_0 + \beta \dot{x}_0 = -\frac{a}{2} V_0 \quad (1. \text{ Steuerungsbedingung}) \quad (7).$$

Dies stellt eine einparametrische Geradenschar in der Ebene der Steuerparameter  $\alpha, \beta$  dar, bestimmte Gebiete dieser Ebene sind hiernach für periodische Lösungen ausgeschlossen. Weiterhin ist zu fordern, daß  $|\dot{g}| > V_0$  ist zur Zeit  $t = 0$  (d. h. für den ersten Schaltpunkt, sonst würde ja keine „gesättigte“, sondern eine lineare Steuerung beginnen), das bedeutet:

$$|\alpha \dot{x}_0 + \beta \ddot{x}_0| > V_0 \quad (2. \text{ Steuerungsbedingung}) \quad (8).$$

Schließlich dürfen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schaltpunkten  $na$  und  $(n + 1)a$  keine weiteren Schnittpunkte von  $G$  mit der linearen Steuerkurve  $g$  liegen (diese müßten sonst ja auch Schaltpunkte sein); dies führt im Falle  $\zeta^2 < 1$  auf die Einschränkung

$$0 < a < \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3. \text{ Steuerungsbedingung}) \quad (9).$$

Mit (7) genügen die periodischen Lösungen von (5) noch der Funktionalgleichung

$$x(t + na) = (-1)^n x(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (10);$$

derselben Funktionalgleichung genügen auch  $\dot{x}(t)$  und  $\ddot{x}(t)$ .

<sup>2)</sup> H. B i l h a r z, Über eine gesteuerte eindimensionale Bewegung. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 206 bis 215.

Mit Benutzung einer Stabilitätsdefinition von T r e f f t z<sup>3)</sup> läßt sich zeigen, daß die periodischen Lösungen stabil sind und alle anderen stabilen Bewegungen für  $t \rightarrow \infty$  gegen die (zugehörigen) periodischen Lösungen konvergieren; die periodischen Lösungen entsprechen somit den Gleichgewichtslagen des schwingenden Systems. Besonders erwünscht sind hierbei die periodischen Lösungen mit möglichst kleiner Maximalamplitude, eine Betrachtung der durch (7) und (8) in Bereiche unterteilten Ebene der Steuerparameter  $\alpha, \beta$  führt daher zu wichtigen Hinweisen für die Wahl dieser Steuergrößen<sup>4)</sup>. Die Untersuchungen sollen noch fortgeführt und insbesondere auf Bewegungen mit mehreren Freiheitsgraden ausgedehnt werden.

## Grundzüge eines Leitfadens zur praktischen Berechnung von Kreiszyinderschalen

Von M. J. De Schwarz<sup>1)</sup> in Rom

Für eine Kreiszyinderschale von gleichmäßiger Dicke seien Spannungen, Momente (pro Längeneinheit) und die Deformationen der Mittelfläche unter Eigengewicht und geeigneten Randbedingungen zu bestimmen.

Zu berechnen sind also Größen der Form

$$G(x, \psi) = \sum_{n=1,3,\dots} G_n(\psi) \cdot \begin{cases} \sin \frac{n\pi x}{L} & (0 \leq x \leq L) \\ \cos \frac{n\pi \psi}{L} & (0 \leq \psi \leq \psi_0) \end{cases}$$

d. h. in erster Linie  $G_1(\psi)$  und  $G_3(\psi)$ , wofür im Folgenden kurz  $G$  gesagt sei.

Es ist  $G = G^0 + G'$ , wobei im Rahmen einer vereinfachten Theorie  $G^0$  die sog. Membranlösung und  $G'$  eine zusätzliche Lösung ist, die gestattet die an den Längsrändern vorgeschriebenen Bedingungen zu erfüllen.

Trotz zahlreicher Vereinfachungsvorschläge<sup>2)</sup> bleibt die praktische Berechnung der  $G'$  noch ziemlich umständlich, so daß der Gedanke gerechtfertigt erscheint, eine größere Anzahl auf typische Fälle bezüglicher numerischer Resultate mit den nötigen Gebrauchsanweisungen in einem Leitfaden zusammenfassen, welcher im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Rom unter Beratung durch Prof. Ing. G. K r a l l in Vorbereitung ist.

Aus dem Gedankengang dieses Leitfadens sei erwähnt, daß die Typeneinteilung nach A a s - J a k o b s e n<sup>3)</sup> beibehalten ist. Alle Resultate beziehen sich auf gewisse Durchschnittstypen von Quertonnen (I) und Längstonnen (II), bzw. auf die Typen I<sub>1</sub>, I<sub>3</sub>, II<sub>1</sub>, II<sub>3</sub>, je nachdem ob es sich um die Berechnung von  $G_1(\psi)$  oder  $G_3(\psi)$  handelt. Durch die Typen wird das gegenseitige Verhältnis von Länge, Radius und Dicke der Schalen festgelegt, nicht aber ihr Öffnungswinkel  $\psi_0$ .

Dieser geht in  $G'$ , das für genügend großes  $\psi_0$  stets auf die Form

$$G' = e^{\bar{\gamma}\psi} [\cos \bar{\beta}\psi (c_A A + c_B B) + \sin \bar{\beta}\psi (-c_B A + c_A B)] \\ + e^{\bar{\mu}\psi} [\cos \bar{\gamma}\psi (c_C C + c_D D) + \sin \bar{\gamma}\psi (-c_D C + c_C D)]$$

gebracht werden kann, nur mittels der  $A, B, C, D$  ein, die durch die Bedingungen am Längsrand  $\psi = 0$  zu bestimmen sind und darin bestehen, daß vier von den Größen  $G$ , bzw. vier Linearkombinationen derselben gleich Null gesetzt werden.

Für weniger großes  $\psi_0$  ist  $G'$  durch Zusatzglieder ergänzt zu denken, die  $\psi_0$  enthalten. Durch passende Definition modifizierter Koeffizienten  $\bar{c}_A, \bar{c}_B, \bar{c}_C, \bar{c}_D$  ist aber — für ein symmetrisches Problem — immer zu erreichen, daß am Rand

$$G' = \bar{c}_A A + \bar{c}_B B + \bar{c}_C C + \bar{c}_D D$$

ist, was das Aufstellen der Randbedingungen erleichtert.

In dem Leitfaden sind für sämtliche „Typen“ und alle interessierenden  $G$  — die nach dem Verfahren von A a s - J a k o b s e n berechnet —  $c_A, c_B, c_C, c_D$  tabelliert. Tabelliert sind ferner außer der Membranlösung und den Faktoren  $e^{\bar{\gamma}\psi} \cos \bar{\beta}\psi \dots e^{\bar{\mu}\psi} \sin \bar{\gamma}\psi$  auch die  $A, B, C, D$ , d. h. die Lösungen von je einem System von vier linearen Gleichungen, für folgende Rand-

<sup>3)</sup> E. T r e f f t z, Zu den Grundlagen der Schwingungstheorie. Math. Ann. 95 (1925), S. 307—312.

<sup>4)</sup> Für eine ausführliche Darstellung sei auf die Arbeit von H. B i l h a r z und St. S c h o t t l a e n d e r, Periodische Lösungen einer geregelten Bewegung, Archiv der Math. 5 (1954), S. 479 ff. verwiesen.

<sup>1)</sup> Diese Arbeit wurde im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Rom hergestellt.

<sup>2)</sup> Vgl. A. K u h e l j, Transactions Technical University in Brno, XVII, 1948, S. 123—156. — W. Z e r n a, Ingenieur-Archiv XX, 1952, S. 357—362. — J. M o e, Assoc. Internationale, Ponts et Charpentes, 1953.

<sup>3)</sup> A. A a s - J a k o b s e n, Der Bauingenieur 20 (1939), S. 394—405.



bedingungen: An den Längsrändern aufgestützte, eingespannte, freie Schalen, am Längsrand zusammengefügte Schalen, Schalen mit Randglied, und zwar für alle „Typen“ und die Öffnungswinkel  $180^\circ$ ,  $120^\circ$  und  $50^\circ$ . Außerdem werden Tabellen für sämtliche Randwerte und Figuren für den Verlauf der wichtigeren Größen  $G$  längs der ganzen Schale gegeben.

Unter den numerischen Resultaten besonders zu erwähnen ist, daß am Rand ausnahmslos positive, zum Teil sehr starke Längsspannungen auftreten, mit denen eine Dilatation in der Längsrichtung nahezu proportional verläuft. Bemerkenswert sind ferner Beispiele von zwei Schalen mit verschiedenem Öffnungswinkel, die am Längsrand zusammengefügt sind, und von einer Schale mit  $\psi_0 = 50^\circ$  und Randglied, wobei klar ersichtlich wird, wie Schale und Randglied sich gegenseitig hinaufziehen. Die  $G_3(\psi)$  sind meist klein gegenüber den  $G_1(\psi)$ , doch kommen für den Typ II auch Fälle von Anfachung vor.

## Der Potentialbegriff in der Motorrechnung und seine Anwendung in der Theorie dünner Stäbe

Von F. Selig in Wien

Eine konservative Kraft ist definiert durch die Forderung, daß ihre Arbeit bei jeder mit den Bindungen verträglichen, endlichen Verschiebung nur von der Anfangs- und Endlage ihres Trägers abhängt. Die Arbeit muß dann eine eindeutige Funktion der Lagekoordinaten  $\lambda_i$  sein, aus der durch geeignete Gradientenbildung der gegebene Kraftmotor wieder ableitbar sein muß.

Bezeichnet man den Kraftmotor mit  $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}; \mathfrak{M}_0)$ , ( $\mathfrak{R}$  bedeutet den Kraftvektor und  $\mathfrak{M}_0$  den auf einen beliebigen Bezugspunkt 0 bezogenen Momentenvektor) und den Geschwindigkeitsmotor mit  $\mathfrak{G} = (\mathfrak{W}; \mathfrak{V}_0) = \left( \mathfrak{W}; \frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \mathfrak{R} \times \mathfrak{W} \right)$ , ( $\mathfrak{W}$  bedeutet den Winkelgeschwindigkeitsvektor,  $\mathfrak{V}_0$  die Bezugspunktsgeschwindigkeit,  $\mathfrak{R}$  den Ortsvektor von 0 zu einem beliebigen körperfesten Punkt 0') dann ist das Differential der Arbeit gegeben durch das Produkt

$$dA = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{G} dt \quad \dots \quad (1).$$

Ausgehend von der formalen Darstellung der Winkelgeschwindigkeit als Zeitdifferential von Quasikoordinaten  $\pi_i$

$$\mathfrak{W} = \frac{d\pi}{dt} \quad \text{mit} \quad d\pi_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} d\lambda_j \quad \dots \quad (2)$$

läßt sich auch der Geschwindigkeitsmotor anschreiben als

$$\mathfrak{G} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} \quad \text{mit} \quad d\mathfrak{G} = (d\pi, d\mathfrak{R} + \mathfrak{R} \times d\pi) \quad \dots \quad (3).$$

Die Koeffizienten des nichtvollständigen Differentials  $d\pi_i$  sind Funktionen der Lagekoordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Aus (1) folgt somit

$$dA = \mathfrak{R} \cdot d\mathfrak{G} = \mathfrak{R} d\mathfrak{R} + \mathfrak{M}_0' d\pi \quad \dots \quad (4)$$

oder ausführlich geschrieben

$$dA = \mathfrak{R} d\mathfrak{R} + \sum_{i,j=1}^3 \mathfrak{M}_0' A_{ij} d\lambda_j \quad \dots \quad (5).$$

Durch Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen kann aus (5) stets die Konservativität überprüft werden.

Zu der der Motorrechnung angepaßten Gradientenbildung gelangt man im Anschluß an (4) einfach dadurch, daß man das negative Differential eines Potentials  $U$  an Stelle des Arbeitsdifferentials einführt, woraus sich sofort

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{R}} = -\mathfrak{R}, \quad \left( \frac{\partial U}{\partial \pi} \right) = -\mathfrak{M}_0' \quad \dots \quad (6)$$

ergibt. Um anzudeuten, daß es sich um eine symbolische Differentiation nach einer Quasikoordinate handelt, wurde in (6) die Klammer gesetzt. Man hat darunter zu verstehen

$$\left( \frac{\partial}{\partial \pi_i} \right) = \sum_{j=1}^3 N_{ij} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \quad \text{mit} \quad (N_{ij}) = (A_{ij})^{-1}.$$

Zusammenfassend erhält man

$$\mathfrak{A} = - \left( \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{R}}; \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\pi}} \right) + \mathfrak{R} \times \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{R}} \right) = - \frac{dU}{d\mathfrak{S}} \dots \dots \dots (7).$$

Durch Vergleich von (3) und (7) erkennt man, daß durch Vertauschung von  $d\bar{\pi}$  und  $\partial/\partial \mathfrak{R}$  sowie  $d\mathfrak{R}$  und  $(\partial/\partial \bar{\pi})$  die Lagenänderung  $d\mathfrak{S}$  in die Lagenableitung  $d/d\mathfrak{S}$  übergeht.

Als Beispiele dienen gewisse Belastungsfälle aus der Theorie dünner Stäbe. An Stelle der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit treten die beiden Krümmungen und die Torsion, an Stelle von  $d\mathfrak{R}$  treten die Verschiebungen, an Stelle der Zeit  $t$  tritt die Bogenlänge  $s$  der Zentrallinie. Durch Einführung von R o d r i g u e s s c h e n Koordinaten

$$d\bar{\pi} = \frac{2}{1+\lambda^2} (\bar{d}\bar{\lambda} + \bar{\lambda} \times d\bar{\lambda})$$

wurde der Fall näher untersucht, daß zwischen dem Momentenvektor  $\mathfrak{M}_0$  (0' Endpunkt der Zentrallinie) und dem Tangentenvektor  $\left( \frac{dX}{ds}, \frac{dY}{ds}, 1 \right)$  ein linearer Zusammenhang besteht.

Bei konkret gestellten konservativen Problemen wird bei Verwendung des D i r i c h l e t s c h e n Prinzips zur Untersuchung der Stabilität die explizite Berechnung des Potentials der Kraft- und Momentenbelastung nicht notwendig, da die nach dem Variationsparameter  $\varepsilon$  abgeleitete Energie der Belastung wieder durch die Lagenableitung und die Lagenvariation ausgedrückt werden kann

$$\frac{dU}{d\varepsilon} = \frac{dU}{d\mathfrak{S}} \cdot \frac{d\mathfrak{S}}{d\varepsilon}.$$

Somit treten in den Randgliedern wieder nur die Bestimmungsstücke des Kraftmotors auf. Ähnliches gilt auch für die zweite Variation der Formänderungsarbeit. Hierauf soll später ausführlicher eingegangen werden.

## Optimale Schwingungstilgung durch Fliehkraftpendel

Von A. Slibar in Wien

Fliehkraftpendel werden nach den einführenden Arbeiten verschiedener Autoren zur Tilgung gefährlicher Drehschwingungen und zur Erzielung konstanter Drehgeschwindigkeit der Kurbelwelle im modernen Motorenbau häufig verwendet.

Betrachtet man ein System nach Bild 1, so liefert die linearisierte Rechnung bekanntlich die als erste Abstimmbedingung bezeichnete Beziehung

$$\Omega^2 = \frac{L}{I} \omega_0^2 \dots \dots \dots (1),$$

wenn  $\Omega$  die Kreisfrequenz der erregenden Momente,  $\omega_0$  die mittlere Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Masse ist und  $\Omega = \nu \omega_0$  gilt. Eine Aussage über die an der Trägermasse vom Träg-

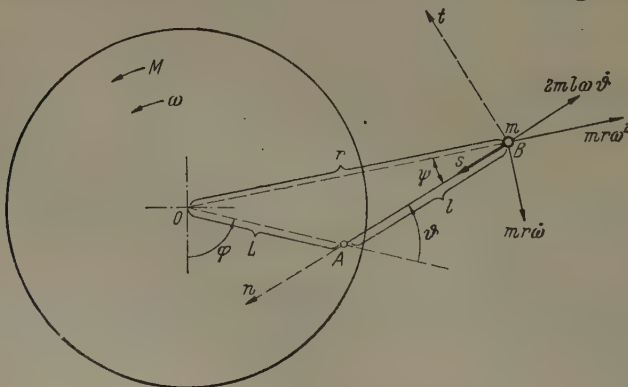


Abb. 1. Schema des als mathematisches Pendel aufgefaßten Tilgers

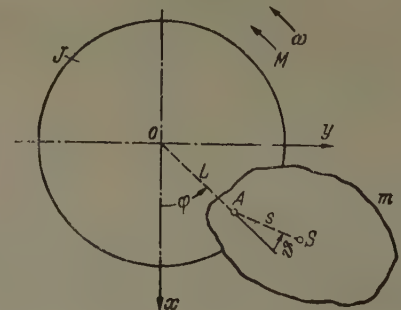


Abb. 2. Schema des als physikalisches Pendel aufgefaßten Tilgers

heitsmoment  $J$  günstigst anzubringende Pendelmasse  $m$  folgt aus der linearisierten Behandlung nicht. Schreibt man die Grundgleichungen für den als mathematisches Pendel <sup>1)</sup> betrachteten Tilger an und führt die Abkürzungen

$$\frac{l}{L} = \lambda, \quad \frac{m \cdot L^2}{J} = \Theta, \quad \frac{\Delta M}{J \omega_0^2} = K, \quad \omega_0 t = \tau \dots \dots \dots (2)$$



ein, kennzeichnet ferner die Ableitungen  $d/d\tau$  durch einen Strich und entwickelt, da  $\vartheta$  stets kleiner als 1, die Winkelfunktionen, so erhält man für die Ausschläge  $\vartheta$  die Differentialgleichung

$$a_1 \vartheta'' + a_2 \vartheta + a_3 \vartheta^3 + a_4 \vartheta'' \vartheta^2 + a_5 \vartheta'^2 \vartheta + a_6 \vartheta' \vartheta = K \sin \nu \tau \quad (3),$$

deren Koeffizienten  $a_i$  Funktionen der Parameter  $\lambda$  und  $\Theta$  sind. Die durch Iteration gefundene Lösung von (3) liefert, in die Bewegungsgleichung des Grundsystems eingesetzt, nach Integration dieser Beziehung die „bezogene Winkelgeschwindigkeitsschwankung  $\Delta\omega/\omega_0$ “ mit den Koeffizienten  $a_i(\lambda, \Theta)$  und  $c_i(\lambda)$  in folgender Form:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = - \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{c_2 - \nu^2 c_1}{a_2 - \nu^2 a_1} \cdot K - (c_2 - \nu^2 c_1) \frac{[3(a_3 - \nu^2 a_4) + \nu^2 a_5]}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^4} K^3 + \frac{3(c_3 - \nu^2 c_4)}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^3} K^3 \right\} \cdot \cos \nu \tau$$

$$+ \frac{[c_2 - (2\nu)^2 c_1] a_6}{4[a_2 - (2\nu)^2 a_1] (a_2 - \nu^2 a_1)^2} K^2 \cdot \cos 2\nu \tau$$

$$- \frac{1}{12\nu} \left\{ \frac{[c_2 - (3\nu)^2 c_1] \cdot [a_3 - \nu^2 (a_4 + a_5)]}{[a_2 - (3\nu)^2 a_1] \cdot (a_2 - \nu^2 a_1)^3} - \frac{c_3 - \nu^2 c_4}{(a_2 - \nu^2 a_1)^3} \right\} K^3 \cdot \cos 3\nu \tau \quad (4).$$

Die Rechtfertigung der Streichung der Glieder mit höheren als der dritten Potenz in  $K$  erweist sofort eine Größenabschätzung dieses Parameters nach ausgeführten Maschinen. Darnach ergibt sich  $K$  je nach Tangentialdruckdiagramm, Kurbelwellenkonstruktion und Drehzahl der Maschine in der Größenordnung von  $10^{-5}$ — $10^{-3}$ . Das Glied 1. Größenordnung in  $K$  verschwindet mit Einhaltung von (1). Der für die Amplitude der bezogenen Winkelgeschwindigkeitsschwankung entscheidende Term 2. Größenordnung in  $K$  läßt sich als Funktion des Parameters  $\Theta$  zu einem Minimum machen. Man erhält dann für die optimale Pendelmasse den Ausdruck

$$\Theta_{opt} = \frac{m_{opt} \cdot L^2}{J} = \frac{3\nu^4}{2(\nu^2 + 1)^2} \quad (5).$$

Ferner zeigt sich, daß die jeweils doppelten Werte der optimalen Pendelmassen zu Resonanzen führen.

Wenn die nicht linearisierte Behandlung von Pendelschwingungstilgern auch Aussagen über die zur Erzielung geringster Winkelgeschwindigkeitsschwankung günstigst anzubringende Pendelmasse liefert, so legt die Betrachtung der ausgeführten Tilgerformen doch deren Behandlung als physikalische Pendel nahe<sup>2)</sup>. Außerdem ist zu beachten, daß, während das mathematische Pendel durch die beiden Größen  $l$  und  $m$  festgelegt ist, bei der Behandlung als physikalisches Pendel der Trägheitsradius  $i_s$  des Pendelkörpers um seinen Schwerpunkt als neue Kenngröße auftritt. Dieser dritte Parameter gewährt aber zur Erzielung optimaler Verhältnisse zweifellos wesentlich größere Freizügigkeit in der Konstruktion.

Legen wir eine Anordnung nach Bild 2 mit den dort angegebenen Bezeichnungen zugrunde und verwenden die Abkürzungen

$$\frac{s^2 + i_s^2}{L \cdot s} = \lambda^*, \quad \frac{s}{L} = \sigma, \quad \frac{m \cdot L^2}{J} = \Theta, \quad \frac{\Delta M}{J \cdot \omega_0^2} = K, \quad \omega_0 t = \tau \quad (6),$$

so erhalten wir nach verschiedenen Umformungen eine Lösung analog Gl. (4), wenn die Größen  $a_i(\lambda, \Theta)$  durch die Größen  $a_i^*(\lambda^*, \Theta, \sigma)$  und die Größen  $c_i(\lambda)$  durch die Werte  $c_i(\lambda^*)$  ersetzen. Bei Einhaltung einer, der ersten Abstimmbedingung des mathematischen Pendels entsprechenden Beziehung

$$\frac{s^2 + i_s^2}{L \cdot s} \quad (7)$$

verbleibt als ausschlaggebendes Glied für die Amplitude der bezogenen Winkelgeschwindigkeitsschwankung  $\Delta\omega/\omega_0$  der Koeffizient des mit  $K^2$  multiplizierten Gliedes

$$\Gamma \equiv - \frac{3}{2\Theta\sigma \cdot (\nu^2 + 1)^2 \left[ 3(1 + \Theta) - \Theta\sigma \frac{4\nu^4 + 2\nu^2 + 1}{\nu^2} \right]} \quad (8)$$

der sich nach einfacher Umformung für alle Werte von  $\nu$  darstellen läßt.

<sup>1)</sup> K. Desoyer und A. Slibar, Zur Berechnung von Pendel-Schwingungstilgern. Ing.-Arch. 21. Band, 1953, S. 208.

<sup>2)</sup> A. Slibar und K. Desoyer, Zur Erzielung optimaler Wirkung bei Pendel-Schwingungstilgern. Ing.-Arch. 22. Band, 1954, S. 36.

## Ersatz der Lochrandbelastung einer elliptisch gelochten Scheibe durch eine Belastung der ungelochten Scheibe

Von G. Sonntag in München

An einem Beispiel soll auf eine Beziehung aufmerksam gemacht werden mit deren Hilfe sich vielleicht neue Lösungen der ebenen Elastizitätstheorie finden lassen.

In einer unendlich ausgedehnten Scheibe herrsche der gleichmäßige Spannungszustand  $p_x, p_y$ . Wenn in diese Vollscheibe ein elliptisches Loch geschnitten wird, deren Hauptachsen  $a, b$  in Richtung der Hauptspannungen  $p_x, p_y$ , der Vollscheibe liegen (s. Bild 1), ändert sich der ursprüngliche gleichmäßige Spannungszustand in bekannter Weise<sup>1)</sup>. Die durch das Loch hervorgerufene Störfunktion entsteht aus der gedachten Belastung des Lochrandes, die den geschnittenen Spannungen der gleichmäßig beanspruchten Vollscheibe entgegengesetzt gerichtet ist, und damit einen lastfreien Lochrand erzielt.

Es wurde untersucht ob diese, durch das elliptische Loch in der Scheibe hervorgerufene Störfunktion erzeugt werden kann durch eine Belastung der Vollscheibe innerhalb der Lochkontur. Mathematisch gesehen handelt es sich um die analytische Fortsetzbarkeit der Störfunktion; die gefundene Lösung soll hier aber anschaulich beschrieben werden.

Durch eine Belastung der Vollscheibe innerhalb der elliptischen Lochkontur durch einfache Kräfte, deren Spannungen mit  $1/r$  vom Lastangriffspunkt abklingen, läßt sich das Ziel nicht erreichen. Die erforderlichen Grundtypen der Belastung ergeben sich wie folgt:

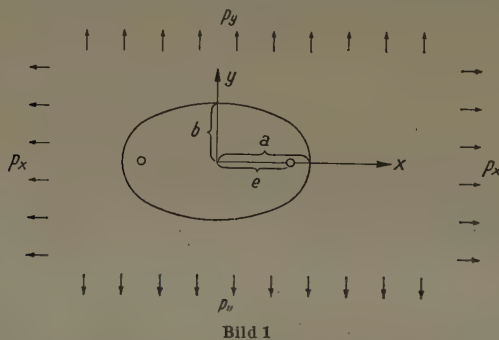


Bild 1

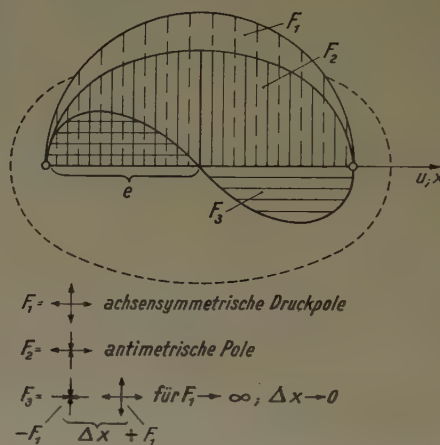


Bild 2

Nähern sich zwei entgegengerichtete Kräfte auf ihrer Wirkungsline und nehmen dabei in einer Weise zu, daß sich bei unendlich kleinem Abstand noch ein endlicher resultierender Wert ergibt, dann erhält man eine gerichtete Belastung deren Spannungen mit  $1/r^2$  vom Angriffspunkt abklingen. Durch Überlagerung der gleichen Belastung, jedoch um  $90^\circ$  verdreht, resultiert der achsensymmetrische Druck- (oder Zug-)Pol, dessen Spannungsfunktion  $F_1$  lautet<sup>2)</sup>:

$$F_1 = -C_1 \ln r.$$

Hat die um  $90^\circ$  verdreht überlagerte Belastung entgegengesetztes Vorzeichen, dann resultiert ein antisymmetrischer Pol  $F_2$ :

$$F_2 = C_2 \cos 2\varphi.$$

Nähern sich zwei achsensymmetrische Pole  $F_1$  entgegengesetzten Vorzeichen in der oben für zwei Kräfte beschriebenen Weise, dann folgt die Spannungsfunktion  $F_3$  der Belastung deren Spannungen mit  $1/r^3$  abklingen:

$$F_3 = -C_3 \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Es läßt sich nun nachweisen, daß der Spannungszustand, der durch das elliptische Loch erzeugt wird, ebenso entsteht, durch eine Belastung der Vollscheibe längs der Verbindungsline der Brennpunkte des gedachten elliptischen Loches, wie folgt (s. Bild 2):

1. Belastung durch achsensymmetrische Druckpole  $F_1$  der Intensität

$$C_1 = \left( p_x \frac{b^2}{\pi e} + p_y \frac{a^2}{\pi e} \right) \sqrt{1 - (u/e)^2} \cdot du.$$

<sup>1)</sup> S. z. B. L. F ö p l „Drang und Zwang“ 3. Bd., S. 124 ff. R. Oldenbourg, München 1947.

<sup>2)</sup> S. L. F ö p l „Drang und Zwang“ Bd. I, 3. Aufl. (1941) S. 275 ff. Verlag R. Oldenbourg, München.



## 2. Belastung durch antimetrische Pole $F_2$ der Intensität

$$C_2 = \left( p_x - \frac{a}{b} p_y \right) \frac{e}{2\pi(a/b - 1)} \sqrt{1 - (u/e)^2} \cdot du.$$

## 3. Belastung durch Pole $F_3$ der Intensität

$$C_3 = - \left( p_x - \frac{a}{b} p_y \right) \frac{b^2}{\pi(a/b - 1)} \cdot \frac{u}{e} \sqrt{1 - (u/e)^2} \cdot du.$$

Durch Integration und Berechnung der Spannungen wurde im Vergleich mit der bekannten Lösung für das elliptische Loch die Richtigkeit dieser Ersatzbelastung der Vollscheibe nachgewiesen.

Beachtung verdient der Sonderfall, in dem sich  $p_x/p_y$  wie  $a/b$  verhält. In diesem Fall verschwinden  $C_2$  und  $C_3$  und es verbleibt nur die Belastung durch achsensymmetrische Druckpole.

Für das Kreisloch vom Radius  $a$  lautet die Spannungsfunktion der Störung, wenn  $p_y = 0$

$$F = \frac{p_x a^2}{2} \left( -\ln r + \cos 2\varphi - \frac{a^2}{2r^2} \cos 2\varphi \right).$$

In diesem Ausdruck ist keine dem Pol  $F_3$  entsprechende Spannungsfunktion, deren Spannungen mit  $1/r^3$  abklingen, enthalten, dafür klingen die Spannungen des dritten Gliedes in der Klammer

$$p_x \cdot \frac{a^4}{4r^2} \cdot \cos 2\varphi = F_4 \text{ mit } 1/r^4 \text{ ab.}$$

Der Pol  $F_4$  entsteht aus Polen  $F_3$  entgegengesetzten Vorzeichens bei dem oben beschriebenen Grenzübergang.

Diese Untersuchung stellt einen Anfang dar; es wäre die weitere Aufgabe Zusammenhänge aufzuspüren, die einer Verallgemeinerung den Weg zeigen, um damit noch unbekannte Lösungen zu finden.

# Die Plattentheorie als asymptotisches Integrationsproblem der Elastomechanik

Von E. Weinel in Jena

Die Kirchhoffsche Plattentheorie, auch in der von E. Reißner<sup>1)</sup> und M. Schäfer<sup>2)</sup> erweiterten Gestalt, ist theoretisch immer noch unbefriedigend, weil in ihr mit Spannungsverteilungen und Verzerrungszuständen gearbeitet wird, die mit den Verträglichkeitsgleichungen im Widerspruch stehen und somit in einem ideal-elastischen Körper eigentlich gar nicht möglich sind. Die unbestreitbare Bedeutung der Reißner-Schäferschen Entwicklung besteht darin, daß drei Randbedingungen erfüllt werden können, wie es der Natur des elastizitätstheoretischen Problems entspricht. Die strengen Lösungen des Plattenproblems von Michell<sup>3)</sup>, Love<sup>4)</sup>, Neuber<sup>5)</sup> genügen zwar den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, sind aber so speziell, daß nur zwei Randbedingungen vorgeschrieben werden können.

Das im Vortrag entwickelte asymptotische Integrationsverfahren mit Hilfe des Euler-Maclaurinschen Entwicklungssatzes hat sich bei näherem Zusehen als ein Weg zur strengen Lösung des dreidimensionalen Plattenproblems zu erkennen gegeben. Aus den im allgemeinen divergenten Entwicklungen nach Bernoullischen Polynomen kann leicht die allgemeine und konvergente Lösung des dreidimensionalen Plattenproblems gewonnen werden.

Als ein erstes einfaches Resultat ergibt sich unmittelbar eine Einsicht in den Zusammenhang zwischen den Lösungen von Michell-Love-Neuber einerseits und dem Vorgehen von Reißner-Schäfer andererseits.

Ist nämlich das Verschiebungssystem

$$u_0(x, y, z), \quad v_0(x, y, z), \quad w_0(x, y, z)$$

<sup>1)</sup> E. Reißner, On bending of elastic Plates. Quart. Math. 7. (1949) S. 223—228.

<sup>2)</sup> M. Schäfer, Über eine Verfeinerung der klassischen Theorie dünner schwach gebogener Platten. Z. angew. Math. Mech. 32. (1952) S. 161—171.

<sup>3)</sup> Michell, On the direct Determination of Stress in a elastic solid. London Math. Soc. Proc. 31. (1899) S. 100.

<sup>4)</sup> Love, Lehrbuch der Elastizität. (1906) § 299 und folgende.

<sup>5)</sup> Neuber, Über das Korbproblem in der Plattentheorie. Z. angew. Math. Mech. 20. (1940) S. 199 bis 209.

eine Lösung des Plattenbiegungsproblems nach *Michell*, *Love* oder *Neuber*, so erhält man in der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y) \sin \frac{\pi z}{2h} \\ v &= v_0(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y) \sin \frac{\pi z}{2h} \\ w &= w_0(x, y, z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

eine neue Lösung der Grundgleichungen, wenn  $\psi(x, y)$  der Differentialgleichung

$$h^2 \nabla^2 \psi - (\pi/2)^2 \psi = 0 \dots \dots \dots (2)$$

genügt.

Das ist aber gerade die bei *Schäfer* für die Momentenfunktion  $\psi$  angegebene Differentialgleichung, wenn man von dem numerisch unwesentlichen Unterschied zwischen  $(\pi^2/4)$  und  $(5/2)$  absieht.

Mit (1) lassen sich dann drei Randbedingungen erfüllen und man überzeugt sich leicht, daß die Näherungstheorie von *Reißner* und *Schäfer* die aus (1) gewonnenen elastisch-strengen Ergebnisse numerisch gut wiedergibt.

Eine ausführliche Darstellung des dreidimensionalen Plattenproblems mit allgemeinen Randbedingungen, insbesondere auch die Behandlung von Schwingungsproblemen folgt in einer späteren Arbeit.

**Referate folgender Vorträge sind nicht eingegangen:**

*N. Forbat*, Mons: Vibrations de flexion d'un arbrecylindrique en rotation rapide.

*K. Magnus*, Frankfurt/Main: Die Stabilität des kräftefreien unsymmetrischen Kreisel in kardanischer Lagerung. (Eine ausführliche Arbeit über diesen Gegenstand wird in einem der nächsten Hefte dieser Zeitschrift erscheinen.)

*H. Schwieger*, Halle/Saale und *G. Haberland*, Wittenberg: Die vollständige Bestimmung des Biegespannungszustandes elastischer quadratischer Platten mittels des optischen Zweischichtverfahrens und einer neuen Integrationstheorie.

## D. Strömungslehre

### Zur Differentialgeometrie der ebenen Strömung von Gasen

Von *A. Basch* in Wien

Bei der stationären ebenen Strömung von Gasen treten an Stelle der für unzusammen-drückbare Flüssigkeiten geltenden *Cauchy-Riemann* Gleichungen die Beziehungen

$$\Psi_y = \frac{\varrho}{\varrho_0} \Phi_x, \quad \Psi_x = -\frac{\varrho}{\varrho_0} \Phi_y \dots \dots \dots (1)^1$$

in denen  $\Phi$  das Geschwindigkeitspotential,  $\Psi$  die Stromfunktion,  $\varrho$  die mit dem Ort veränderliche Dichte,  $\varrho_0$  deren Wert in dem als Koordinatenursprung gewählten betrachteten Feldpunkt  $O$  bedeutet. Die *Bernoulli*sche Gleichung

$$\text{grad} \frac{W^2}{2} = -\frac{1}{\varrho} \text{grad } p \dots \dots \dots (2)$$

gibt einen Zusammenhang der Veränderlichkeiten des Betrages  $W$  der Strömungsgeschwindigkeit  $\mathfrak{W}$  und des Druckes  $p$ . Wird die Zustandsgleichung der Gase

$$p = R \varrho T \dots \dots \dots (3)$$

( $R$  Gaskonstante,  $T$  absolute Temperatur) herangezogen und adiabatischer Charakter der Zustandsänderungen vorausgesetzt, etwa in der Form

$$\frac{dT}{T} = (\kappa - 1) \frac{d\varrho}{\varrho} \dots \dots \dots (4)$$

<sup>1)</sup> Vgl. *R. Sauer*, Theoretische Einführung in die Gasdynamik. S. 20. Berlin 1943.





wobei  $k_\phi$  und  $k_\psi$  die ersten Krümmungen von Niveaulinie und Stromlinie bedeuten, so gibt der Vergleich dieser Gleichung mit (7)

$$k_\phi = -\frac{\Phi_{11}}{W_0}, \quad k_\psi = +\frac{\Psi_{22}}{W_0} \dots \dots \dots (15)$$

und hieraus die von jeder Einheitenwahl unabhängige Vektorgröße

$$\begin{aligned} \text{grad } \ln W &= \frac{1}{W^2} \text{grad } W^2 = \frac{1}{W_0} (\Phi_{12} \mathbf{i} + \Phi_{22} \mathbf{j}) \\ &= \frac{1}{W_0} \left( \Psi_{22} \mathbf{i} - \frac{\Phi_{11}}{1 - \frac{W_0^2}{c_0^2}} \mathbf{j} \right) = k_\psi \mathbf{i} + \frac{k_\phi}{1 - \frac{W_0^2}{c_0^2}} \mathbf{j} = \frac{\mathbf{i}}{r_\psi} + \frac{\mathbf{j}}{r_\phi \left(1 - \frac{W_0^2}{c_0^2}\right)} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} \quad (16). \end{aligned}$$

Hierbei bedeuten  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{j}$  die Grundvektoren,  $r_\phi$  und  $r_\psi$  die Krümmungsradien der Niveaulinie und der Stromlinie,  $\xi$  und  $\eta$  die  $x$ - und  $y$ -Komponente des durch (16) bestimmten Gradienten, die

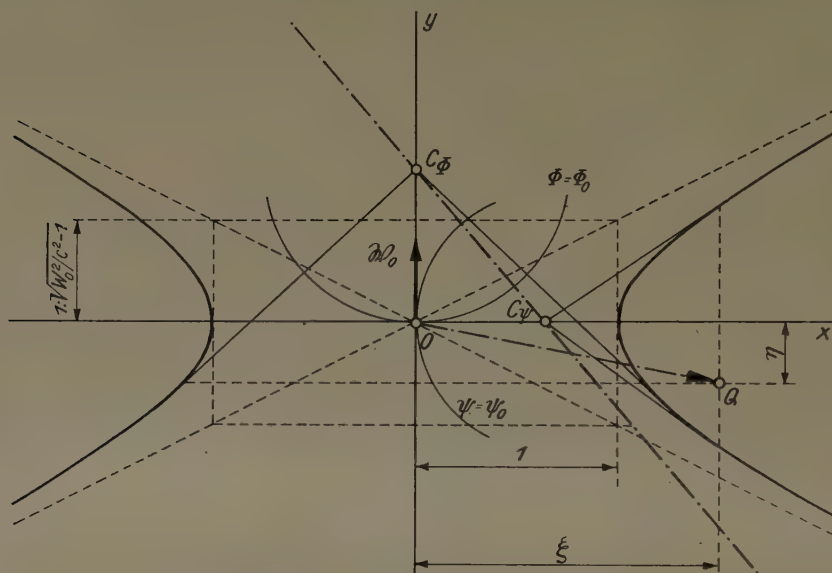


Bild 2

zu den Krümmungsradien der beiden Feldlinien in den Beziehungen stehen

$$\xi r_\psi = 1, \quad \eta r_\phi = \frac{1}{1 - \frac{W_0^2}{c_0^2}} \dots \dots \dots (17).$$

Wir ziehen nun in den Bildern 1 und 2 die Verbindungsgerade der Krümmungsmittelpunkte von Stromlinie  $C_\psi$  und Niveaulinie  $C_\phi$  (Cesàro-Gerade)<sup>2)</sup>. Der Endpunkt  $Q$  des von  $O$  aus gezogenen Vektors  $\vec{OQ} = \text{grad } \ln W$  ist der Pol der Cesàro-Geraden und zwar im Fall von Unterschallgeschwindigkeit ( $W_0 < c_0$ ) bezüglich der Ellipse

$$x^2 + \left(1 - \frac{W_0^2}{c_0^2}\right) y^2 = 1 \dots \dots \dots (18a)^3$$

(Bild 1) im Fall von Überschallgeschwindigkeit ( $W_0 > c_0$ ) bezüglich der Hyperbel

$$x^2 - \left(\frac{W_0^2}{c_0^2} - 1\right) y^2 = 1 \dots \dots \dots (18b)$$

(Bild 2). In einfachem Zusammenhang mit den durch (16) gegebenen Gradienten stehen die Gradienten für Dichte und Druck.

<sup>2)</sup> Bezüglich ihrer Bedeutung in der Differentialgeometrie ebener Kurvenscharen vgl. E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Deutsche Ausgabe von G. Kowalewski. S. 148. Leipzig 1901. — R. v. Lillenthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. S. 168. Leipzig 1908.

<sup>3)</sup> Bei unzusammendrückbaren Flüssigkeiten tritt an Stelle dieser Ellipse der Einheitskreis. Vgl. A. Basch, Mh. Math. Phys. 41, 300—321 (1934). — Proc. Second International Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rotterdam, 1948, Bd. 5, Sect. 10 u. 5, S. 280—285.



## Lineares Charakteristiken-Verfahren für angestellte Rotationskörper und Ringflächen in Überschallströmung

Von S. F. Erdmann und K. Oswatitsch

Ausgehend von der linearen Potentialgleichung für das unsymmetrische Teilpotential  $F$  in Zylinderkoordinaten

$$\beta^2 F_{xx} - F_{rr} - \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F = 0$$

lassen sich mit  $\beta^2 = M_\infty^2 - 1$ ,  $F_x = u$  und  $F_r = v$  entlang der Charakteristiken die Proportionalitätsbeziehungen

$$d(\beta r u) = \pm r d\left(v + \frac{F}{r}\right)$$

ableiten. Entlang einer nach außen gerichteten Charakteristik ( $\xi = \text{const}$ ) gilt das positive und längs der nach innen gerichteten das negative Vorzeichen.

Die neuen Variablen  $\beta r u$  und  $v + \frac{F}{r}$  ändern sich in stetig veränderlichen Strömungsfeldern relativ wenig, wodurch es möglich wird mit verhältnismäßig großen Schritten zu arbeiten. Für den Grenzfall  $v + \frac{F}{r} = \text{const}$  erhält man mit dem Potentialansatz  $F = r + \frac{h^2(x)}{r}$  an schlanken Körpern der Kontur  $r = h(x)$  direkt die bekannte erste Näherung von T s i e n:

$$u(h) = 2 \frac{dh}{dx}.$$

Die Berechnung erfolgt leicht in Form einer Konstruktion in der Geschwindigkeitsebene  $v + \frac{F}{r}$ ,  $\beta r u$  für feldinnere Punkte und erfordert etwas numerische Rechnung am Rand.

Es ist vorgesehen, daß diese Arbeit in der ZFW erscheinen soll.

## Erweiterte Theorie der Grundwasserströmung

Von G. Heinrich in Wien <sup>1)</sup>

Für eine einwandfreie Darstellung der Grundwasserströmung ist es wesentlich, zwischen Mikro- und Makroströmung zu unterscheiden. Unter Mikroströmung sei die tatsächlich auftretende Bewegung der Flüssigkeit in dem unregelmäßigen Porenraum des Festkörpers verstanden. Sie ist nur insoweit von Interesse, als sie durch geeignete Mittelwertbildungen durch eine Makroströmung ersetzt werden kann.

Es werden folgende Annahmen getroffen: 1) die Körner des Festkörpers berühren einander punktförmig, 2) der Festkörper befindet sich dauernd in Ruhe, 3) in der Mikroströmung erfährt die Flüssigkeit nur an den Körneroberflächen eine Hautreibung (im Innern heben sich die Schubspannungen im Mittel auf), 4) im Innern der Strömung soll die Flüssigkeit den Porenraum des Festkörpers vollständig erfüllen, 5) die Filterwirkung des Festkörpers sei so groß, daß bereits bei sehr kleinen Strömungsgeschwindigkeiten die Trägheitskräfte in der Flüssigkeit verschwindend klein werden gegen die übrigen Kräfte, 6) Kapillarkräfte und Verdunstung werden nicht berücksichtigt.

Aus dem System Festkörper-Flüssigkeit werde ein beliebiges Volumen herausgeschnitten, so daß kein Korn von der Schnittfläche zerteilt wird. Wir teilen die wirkenden Kräfte in Oberflächen-, Volums-, und Quasivolumskräfte ein. Die letzteren erhält man, indem man die in der Mikroströmung zwischen Körnern und der Flüssigkeit wirkenden Kräfte in der Makroströmung auf das Volumselement gleichmäßig verteilt. Man kann sie in einen Reibungs- und einen Normaldruck-Anteil zerlegen. Für den Flüssigkeitsanteil des herausgeschnittenen Volumens gilt bei quasistationärer Flüssigkeitsbewegung die Vektorgleichung

$$-\int p d\sigma - \int \frac{\gamma_w}{g} n \nabla U dV + \int \Re_w dV + \int (1 - n) \nabla p dV = 0 \dots (1).$$

<sup>1)</sup> Der vorliegende Bericht bezieht sich auf eine Arbeit, die gemeinsam mit K. D e s o y e r, Wien, durchgeführt wurde.

Hierin bedeuten:  $n$  das auf die Volumseinheit bezogene Porenvolumen,  $p$  den Druck in der Flüssigkeit,  $d\mathbf{o}$  einen nach außen positiv gezählten Vektor des Oberflächenelementes,  $\gamma_w$  das spez. Gewicht der Flüssigkeit,  $U$  das Potential der Volumskraft (Schwerkraft),  $dV$  das Volumselement,  $\Re_w$  bzw.  $(1 - n) \nabla p$  den Reibungs- bzw. Normaldruckanteil der Quasivolumskraft. Da die obige Beziehung für ein beliebiges Volumen gelten muß, folgt — bei Anwendung des Gaußschen Satzes auf das Oberflächenintegral — aus dem Verschwinden des Integranden die Beziehung

$$\Re_w = n \nabla \left( \frac{\gamma_w}{g} U + p \right) \dots \dots \dots (2).$$

Analog erhält man für den Festkörperanteil:

$$\int \mathfrak{E}_K \cdot d\mathbf{o} - \int \frac{(1 - n) \gamma_K}{g} \nabla U dV - \int \Re_w dV - \int (1 - n) \nabla p dV = 0 \dots \dots (3).$$

$\mathfrak{E}_K$  bedeutet den symmetrischen Spannungsaffinor der Korn-zu-Korn-Kräfte, die man in der Makrobetrachtung gleichmäßig über das Oberflächenelement gemittelt denkt,  $\gamma_K$  ist das spez. Gew. des Festkörpermateri als. Analog wie oben folgt aus (3) bei Verwendung von (2):

$$\nabla \cdot \mathfrak{E}_K = \frac{\gamma_K - n(\gamma_K - \gamma_w)}{g} \nabla U + \nabla p \dots \dots \dots (4).$$

Die Gl. (4) ist für die Beurteilung der Rutschgefahr von Dämmen von Bedeutung.

Wir definieren einen Filtergeschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  so, daß  $dq = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{o}$  das durch  $d\mathbf{o}$  pro Zeiteinheit hindurchtretende Flüssigkeitsvolumen bedeutet. Unter Beschränkung auf jene Fälle, bei denen ein linearer Zusammenhang zwischen  $\mathbf{v}$  und  $\Re_w$  besteht, setzen wir, um auch anisotrope Festkörper (Schichtungen) zu erfassen:

$$\Re_w = -\mathfrak{A} \cdot \mathbf{v} \dots \dots \dots (5)$$

worin  $\mathfrak{A}$  ein beliebiger i. a. unsymmetrischer, ortsabhängiger Affinor ist. Aus (5) und (2) folgt:

$$\mathbf{v} = -\mathfrak{A} \cdot \nabla \left( \frac{U}{g} + \frac{p}{\gamma_w} \right) = -\mathfrak{A} \cdot \nabla h \quad \text{mit} \quad \mathfrak{A} = \left( \frac{\mathfrak{A}}{n \gamma_w} \right)^{-1} \dots \dots \dots (6).$$

$\mathfrak{A}$  kann als Durchlässigkeitsaffinor bezeichnet werden,  $h$  ist die Standrohrspiegelhöhe. Für isotropen Festkörper erhält man daraus das Darcy'sche Gesetz

$$\mathbf{v} = -k \nabla h.$$

Wegen der Quelfreiheit der Filtergeschwindigkeit ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ) ergibt sich aus (6) die Beziehung:

$$\nabla \cdot (\mathfrak{A} \cdot \nabla h) = (\nabla \cdot \mathfrak{A}) \cdot (\nabla h) + \mathfrak{A} \cdot (\nabla, \nabla) h = 0^2) \dots \dots \dots (7).$$

Für homogenen, aber anisotropen Festkörper geht (7) über in:

$$\mathfrak{A} \cdot (\nabla, \nabla) h = 0 \dots \dots \dots (7a).$$

Bei symmetrischem  $\mathfrak{A}$  kann man in letzterem Fall  $\mathfrak{A}$  auf das generelle Hauptachsensystem  $\xi, \eta, \zeta$  transformieren und erhält aus (7a) die Differentialgleichung:

$$k_{\xi\xi} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + k_{\eta\eta} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + k_{\zeta\zeta} \frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} = 0 \dots \dots \dots (7b).$$

(7b) kann durch eine volumsgetreue Affinverzerrung in die Laplace'sche Differentialgleichung übergeführt werden. Damit ist der anisotrope Fall auf den isotropen zurückgeführt. Die Differentialgleichung (7), (7a) oder (7b) für die Größe  $h$  ist nun für die bekannten Arten von Randbedingungen, wie sie bei Grundwasserströmungen vorkommen, zu lösen.

Um auch instationäre Probleme zu erfassen, benötigt man noch eine Differentialgleichung für die Bewegung des Grundwasserspiegels. Sie kann durch eine volumetrische Bilanz gefunden werden. Wir betrachten einen prismenförmigen Körper von infinitesimalem Querschnitt und bringen zum Ausdruck, daß der Überschuß der durch die Seitenflächen eintretenden gegenüber der austretenden Flüssigkeitsmenge zu einer äquivalenten Vergrößerung der von

<sup>2)</sup> bedeutet das doppelt skalare Produkt, das Zeichen, das dyadische Produkt.



Flüssigkeit erfüllten Prismenhöhe Anlaß gibt. Ist  $z_1$  bzw.  $z_2$  die Höhe der undurchlässigen Schicht bzw. des Grundwasserspiegels über der willkürlichen  $xy$ -Ebene, so liefert die Volumsbilanz

$$\begin{aligned} & dy \int_{z_1 - \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{dx}{2}}^{z_2 - \frac{\partial z_2}{\partial x} \frac{dx}{2}} v_x \left( x - \frac{dx}{2}, y, z, t \right) dz - dy \int_{z_1 + \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{dx}{2}}^{z_2 + \frac{\partial z_2}{\partial x} \frac{dx}{2}} v_x \left( x + \frac{dx}{2}, y, z, t \right) dz \\ & + dx \int_{z_1 - \frac{\partial z_1}{\partial y} \frac{dy}{2}}^{z_2 - \frac{\partial z_2}{\partial y} \frac{dy}{2}} v_y \left( x, y - \frac{dy}{2}, z, t \right) dz - dx \int_{z_1 + \frac{\partial z_1}{\partial y} \frac{dy}{2}}^{z_2 + \frac{\partial z_2}{\partial y} \frac{dy}{2}} v_y \left( x, y + \frac{dy}{2}, z, t \right) dz \\ & = n(x, y, z_2) \frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial t} dx dy. \end{aligned}$$

Daraus folgt, wenn man berücksichtigt, daß die undurchlässige Schicht eine Stromlinienfläche ist:

$$\frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial t} = \frac{1}{n(x, y, z_2)} \left[ v_x(x, y, z_2, t) - v_x(x, y, z_2, t) \frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial x} - v_y(x, y, z_2, t) \frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial y} \right] \quad (8).$$

Im stationären Fall wird der rechte Klammerausdruck Null und dies bedeutet, daß die Spiegel­fläche ebenfalls zur Stromlinienfläche geworden ist. In der Veränderlichen  $h$  geschrieben lautet (8) für homogenen Festkörper:

$$-\frac{\partial z_2}{\partial t} = \frac{1}{n(x, y, z_2)} \left[ k_{\xi\xi} \frac{\partial h}{\partial \xi} - k_{\xi\xi} \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial z_2}{\partial x} - k_{\eta\eta} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial z_2}{\partial y} \right] \text{ längs der Spiegelfläche}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man, am vorteilhaftesten mittels der Relaxations­methode, instationäre und stationäre Probleme der Grundwasserströmungen untersuchen. Auf diese Weise wurden bereits die instationäre Durchströmung eines Dammes und der stationäre Zu­fluß zu einem rotationssymmetrischen Brunnen behandelt, wobei sich insbesondere die genaue Lage der Hangquelle ergibt, die in vielen Fällen nach den bisherigen Methoden nicht einwandfrei ermittelt werden konnte<sup>3)</sup>.

## Überschallströmungen und langsam pendelnde Drehkörper

Von C. Heinz in Lörach

Das bekannte Singularitätenverfahren von v. K á r m á n, M o o r e und T s i e n zur Be­rechnung der stationären Überschallströmung um schlanke, schwach angestellte Drehkörper wurde von S a u e r auf die Strömung um langsam und mit geringer Amplitude pendelnde Dreh­körper ausgedehnt. Hierbei tritt zu den beiden die axiale und schiefe stationäre Strömung be­herrschenden, im allgemeinen numerisch zu lösenden, Integralgleichungen noch eine weitere, die zur Berechnung der nichtstationären Strömung zu lösen ist.

Die numerische Lösung dieser Integralgleichungen, die schwierig und mit erheblichen Rechenfehlern behaftet ist, wurde vom Verf.<sup>1)</sup> dadurch umgangen, daß sie näherungsweise durch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen ersetzt wurden. Dieses Verfahren wird auf die nicht­stationäre Strömung ausgedehnt. Zu den beiden die stationäre Strömung bestimmenden Diffe­rentialgleichungen tritt noch eine dritte, deren Koeffizienten mit der der schiefen stationären Strömung übereinstimmen. Die in den Differentialgleichungen auftretenden unbekannten Funktionen sind die A b e l'schen Transformaten der Belegungsfunktionen der die Strömung bestimmenden Quellen- und Dipolverteilungen auf der Achse des Drehkörpers. Diese zeigen bei etwaigen Unstetigkeiten der Meridiankurve dasselbe Unstetigkeitsverhalten wie die Meridian­kurve selbst. Dadurch wird die Behandlung von Drehkörpern, deren Meridiankurven Knicke aufweisen, auch gegenüber dem Verfahren von Lighthill wesentlich erleichtert. Da die numerische Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung der numerischen Quadratur einer Funktion entspricht, ist das Verfahren sehr genau; der Rechenaufwand wächst andererseits nur linear mit der Anzahl der Rechenschritte. Die Koeffizienten der Differentialgleichungen sind Funktionen, die weitgehend ein für allemal tabelliert werden können.

<sup>3)</sup> Eine ausführliche Darstellung soll demnächst im Ing.-Arch. erscheinen.

<sup>1)</sup> Tagung GAMM 1953 (Aachen).

## Eine hydrodynamische Existenzbetrachtung

Von *K. Maruhn* in Dresden

Vorgelegt sei eine den Gesamtraum erfüllende, reibungsfreie, inkompressible, homogene, unter dem Einfluß konservativer Kräfte stehende Flüssigkeit. In dieser gibt es unter bestimmten Voraussetzungen<sup>1)</sup> während eines genügend kleinen Zeitintervalles  $t_0 \leq t \leq t_1$  genau eine (quellenfreie) Bewegung, die zur Zeit  $t_0$  ein vorgeschriebenes Geschwindigkeitsfeld, das man sich durch ein entsprechendes Wirbelfeld erzeugt denken kann, besitzt. Wir fragen: Wie muß zur Zeit  $t_0$  das Geschwindigkeitsfeld beschaffen sein, damit die hierdurch festgelegte Bewegung stationär ist, d. h. damit das Geschwindigkeitsfeld zeitunabhängig bleibt?

Wir setzen voraus, daß zur Zeit  $t_0$  die Wirbellinien Wirbelröhren endlichen Querschnittes bilden, die von doppelpunktfreien, stetig gekrümmten Flächen begrenzt werden, die sich entweder ins Unendliche erstrecken oder vom topologischen Typus des Torus sind. Die Stromlinien in diesen Wirbelröhren seien einfach geschlossene stetig gekrümmte Kurven; etwaige Staupunkte (d. h. Punkte mit verschwindender Geschwindigkeit) sollen nur isoliert vorkommen oder sich zu isolierten Stäulinen zusammenschließen.

Wird allgemein die Flüssigkeitsbewegung durch die Gleichungen

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t)$$

beschrieben, [d. h. also, das zur Zeit  $t_0$  in  $(a, b, c)$  gelegene Teilchen befindet sich zur Zeit  $t$  im Punkte  $(x, y, z)$ ], so bestehen zwischen den zu  $t_0$  bzw.  $t$  gehörigen Wirbelkomponenten  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  bzw.  $\xi, \eta, \zeta$  ein und desselben Teilchens die C a u c h y'schen Relationen

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial a} \zeta_0 + \frac{\partial x}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c} \zeta_0, \quad \eta = \frac{\partial y}{\partial a} \xi_0 + \frac{\partial y}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial y}{\partial c} \zeta_0, \quad \zeta = \frac{\partial z}{\partial a} \xi_0 + \frac{\partial z}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial z}{\partial c} \zeta_0 \quad (1).$$

Soll also die durch ein gegebenes Geschwindigkeitsfeld  $u_0(a, b, c), v_0(a, b, c), w_0(a, b, c)$  festgelegte Flüssigkeitsbewegung stationär sein, so muß, da ja die Bahnkurven mit den Stromlinien zusammenfallen und der lokale Wirbelvektor zeitunabhängig ist, auf den in den Wirbelbereichen zur Zeit  $t_0$  gelegenen Stromlinien die Wirbelverteilung den Beziehungen (1) entsprechen.

Da diese Beziehungen zunächst nur für Bewegungen einen Sinn haben, hat man in unserem Falle, d. h. bei einem Stromlinienfeld, darunter folgendes zu verstehen: Wir erklären eine Abbildung der gegebenen Stromlinienkonfiguration in den Wirbelbereichen auf sich selbst derart, daß die Stromlinien in sich übergehen. Bezeichnen etwa  $(a, b, c)$  bzw.  $(x, y, z)$  die hierbei einander entsprechenden Punkte einer Stromlinie und sind diese durch die Bogenlängen  $s_0$  bzw.  $s$  festgelegt, so erscheint die Abbildung in der Gestalt

$$x = \varphi(a, b, c; s), \quad y = \psi(a, b, c; s), \quad z = \chi(a, b, c; s) \quad (2);$$

Staupunkte sollen in sich selbst übergehen. Ersetzen wir schließlich auf den Stromlinien den Parameter  $s$  durch

$$\sigma = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} \quad (3),$$

so erhält man die Gleichungen (2) in der Gestalt

$$x = x(a, b, c; \sigma), \quad y = y(a, b, c; \sigma), \quad z = z(a, b, c; \sigma) \quad (4).$$

Bildet man hieraus die Größen  $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \dots, \frac{\partial z}{\partial c}$  und setzt diese in (1) ein, so bekommt (1) jetzt auch für das Stromlinienbild zur Zeit  $t_0$  einen Sinn, und wir erkennen, da während der stationären Bewegung  $t$  die Rolle von  $\sigma$  übernimmt, daß das Bestehen der im genannten Sinne interpretierten C a u c h y'schen Relationen auf den Stromlinien eines stationären Bewegung entsprechenden Stromliniensystems notwendig ist.

Wir behaupten nun: Das Bestehen der Relationen (1) auf den Stromlinien des gegebenen Geschwindigkeitsfeldes ist auch hinreichend für eine stationäre Bewegung.

Für das weitere bieten die bei den eingangs erwähnten Existenzsätzen entwickelten Methoden die erforderlichen Grundlagen. Lichtenstein geht dort (vgl. l. c.<sup>1)</sup>) nicht von

<sup>1)</sup> Vgl. L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929, S. 415 ff.

<sup>2)</sup> Man beachte, daß in den Relationen (2), die man auch als die Gleichungen des Stromliniensystems auffassen kann,  $a, b, c$  nicht voneinander unabhängig sind; eine Stromlinienschar ist bekanntlich zweiparametrig.

<sup>3)</sup>  $\sigma$  ist bei der stationären Bewegung mit der Zeit  $t$ , die das Teilchen  $(a, b, c)$  braucht, um von  $s_0$  nach  $s$  zu gelangen, identisch.



den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen aus, sondern ersetzt diese, unter Hinzuziehung von (1), durch ein System von Integro-Differentialgleichungen für die gesuchten Funktionen  $x = x(a, b, c, t) \dots$ , das den Druck nicht mehr enthält. Der Beweis der Existenz genau eines Lösungssystems erfolgt dann dort für hinreichend kleine  $t - t_0$  durch geeignet konstruierte sukzessive Näherungen.

Zum Beweise unserer Behauptung modifiziert man das Lichtensteinsche Verfahren und benutzt abweichend als erste Näherung die Verschiebung der Teilchen längs ihrer Stromlinie. Unter der Voraussetzung (1) zeigt sich, daß diese Näherung bereits die Lösung darstellt. Man erkennt leicht, daß in jedem Raumpunkt dauernd dieselbe Geschwindigkeit herrscht und also auch die Betrachtungen „im Großen“, d. h. für beliebiges  $t - t_0$  gelten. Es ergibt sich weiter, daß für Bewegungen, die bezüglich eines gleichförmig rotierenden oder sich parallel zu sich selbst verschiebenden Bezugssystems stationär sind, entsprechende Betrachtungen zum Ziel führen.

Die zunächst recht umständlich erscheinende Bedingung (1) vereinfacht sich wesentlich, wenn wir speziell ebene oder rotationssymmetrische Ausgangsfelder (d. h. Wirbelringe) zugrunde legen. Im ersten Fall reduziert sich (1) auf

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0 \dots \dots \dots (5)$$

falls man die Vorgänge in der  $x, y$ -Ebene betrachtet.

Im zweiten Fall erhält man

$$\eta = \frac{x}{a} \eta_0, \quad \xi = \zeta = 0 \dots \dots \dots (6),$$

mit der  $x, z$ -Ebene als Meridianebene;  $a$  bzw.  $x$  sind der Anfangs- bzw. Endabstand eines Teilchens von der Symmetrieachse. Da zudem in den genannten Spezialfällen Stromfunktionen existieren, erleichtert sich die Konstruktion von Stromliniensystemen, auf denen die Bedingungen (5) bzw. (6) gelten. Auf diesem Wege finden Untersuchungen von Lichtenstein über Systeme geradliniger Wirbelröhren<sup>4)</sup> ihr notwendiges theoretisches Fundament. Die entsprechenden Betrachtungen von L. über die Existenz gewisser rotationssymmetrischer Wirbelbewegungen<sup>5)</sup> bedürfen allerdings noch einiger Modifikation, da dort die stationäre Bewegung eines Ringes mit überall konstantem Wirbelvektor gefordert wird, den es wegen (6) nicht geben kann.

## Über die Anwendung der Impulsmethode bei Messungen an Schaufelgittern

Von N. Scholz in Braunschweig

Für die Ermittlung des Strömungswiderstandes von Tragflügelprofilen und anderen umströmten Einzelkörpern nimmt seit längerer Zeit die sogenannte Impulsmethode eine hervorragende Stellung in der Meßtechnik ein. Diese Methode gestattet mit sehr großer Genauigkeit die Bestimmung des Profilwiderstandes durch punktweise Ausmessung des hinter dem umströmten Körper infolge der Strömungsverluste auftretenden Nachlaufes. Für die Auswertung derartiger Nachlaufmessungen sind die Betzsche und Jonesche Formel in Gebrauch (vgl. [1], S. 462 ff.). Da die Ermittlung der Strömungsverluste durch Integration des örtlichen Gesamtdruckverlustes über den Nachlauf des Körpers besonders bequem ist, sind diese Formeln auch so umgeschrieben worden, daß neben einem Integral über die Gesamtdruckverlustdelle als Hauptglied ein additives Korrekturglied auftritt, das von der Form der Nachlaufdelle abhängt. Durch Annahme einer universellen Form für das Nachlaufprofil ist von A. D. Young [2] dieses Korrekturglied universell berechnet worden.

Bei der Anwendung der Impulsmethode für Nachlaufmessungen an ebenen Schaufelgittern sind in vielen bisher bekannt gewordenen Untersuchungen lediglich der Integralwert des Gesamtdruckverlustes sowie Mittelwerte des statischen Druckes und des Abströmwinkels benutzt worden. Ebenso wie beim Einzelprofil treten hierbei jedoch Korrekturglieder auf, die nicht nur bei der Ermittlung des Strömungswiderstandes, sondern auch bei der Berechnung des statischen Druckes und des Abströmwinkels der Strömung hinter dem Schaufelgitter eingehen. Die Abweichungen gegenüber den Mittelwerten der Meßebene können je nach Abstand der Meßebene hinter dem Schaufelgitter bis zu 20% betragen. Auch hierbei liegt es nahe, diese Korrekturen durch Zugrundelegung einer universellen Form des Nachlaufes ein für alle Mal zu berechnen und damit die Auswertearbeit erheblich abzukürzen.

Betrachten wir eine Kontrollfläche  $K_1$  (Bild 1), die ein Schaufelprofil eines unendlich langen ebenen Schaufelgitters so umschließt, daß in der Eintrittsebene (Ebene 1) und in der Austritts-

<sup>4)</sup> Vgl. I. c. 450 ff.

<sup>5)</sup> Vgl. I. c. 443 ff.

ebene (Ebene 2) der Strömung eine homogene Strömung herrscht, d. h. alle Zustandsgrößen der Strömung nicht mehr von der Koordinate  $y$  längs der Gitterfront abhängen, so läßt sich mit Hilfe des Impulssatzes sofort die resultierende Schaufelkraft angeben, wenn die Strömung in den Ebenen 1 und 2 bekannt ist. Da infolge des Nachlaufes hinter jedem Schaufelprofil die homogene Strömung der Ebene 2 erst sehr weit hinter dem Schaufelgitter erreicht wird, muß die Messung in einer Ebene 2y erfolgen, in der die Strömungsgrößen, insbesondere aber die Geschwindigkeit noch von der Koordinate  $y$  abhängen. Durch nochmaliges Anwenden des Impulssatzes auf eine Kontrollfläche  $K_2$  (Bild 1) kann jedoch aus dieser Messung in der Ebene 2y der Strömungszustand der homogenen Strömung in der Ebene 2 ebenfalls ermittelt werden, so daß damit die Bestimmung der Schaufelkräfte auf eine Ausmessung der Strömung in der Meßebe 2y zurückgeführt ist.

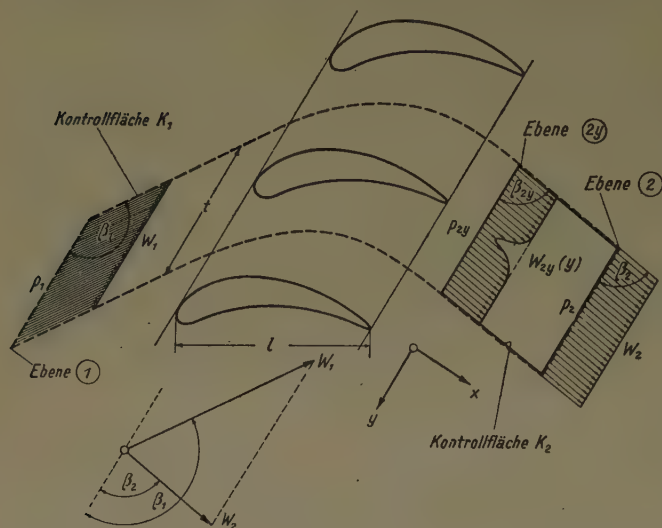


Bild 1:

Zur Anwendung des Impulssatzes bei Messungen an ebenen Schaufelgittern.

Ebene ①: sehr weit vor dem Gitter } homogene  
Ebene ②: sehr weit hinter dem Gitter } Strömung.

Ebene (2y): Meßebe, inhomogene Strömung.

Kontrollfläche  $K_1$ : begrenzt durch die Ebenen ① u. ②.

Kontrollfläche  $K_2$ : begrenzt durch die Ebenen (2y) u. ②.

läßt sich jedoch die gesamte Auswertung auf die Berechnung folgender drei Integralwerte zurückführen:

### 1. mittlerer Gesamtdruckverlust

$$G = \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{g_1 - g_{2y}(y)}{q_1} dy \dots \dots \dots (1),$$

### 2. mittlere statische Druckdifferenz

$$P = \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{p_{2y}(y) - p_1}{q_1} dy \dots \dots \dots (2),$$

### 3. Korrekturglied

$$K = \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{w_{2y}^2(y)}{w_1^2} dy - \left[ \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{w_{2y}(y)}{w_1} dy \right]^2 \dots \dots \dots (3).$$

Hierbei bedeutet  $q_1 = \frac{\rho}{2} w_1^2$  den Staudruck der Zuströmgeschwindigkeit und  $g$  den Gesamtdruck der Strömung.

Diese Integrale sind in der Ebene 2y über eine Teilung zu nehmen. Die gesuchten Strömungsgrößen der Ebene 2 erhält man dann zu:

$$\frac{g_1 - g_2}{q_1} = G - K \dots \dots \dots (4),$$

$$\frac{p_2 - p_1}{q_1} = P - 2 \sin^2 \beta_{2y} \cdot K \dots \dots \dots (5),$$

$$\operatorname{ctg} \beta_2 = \operatorname{ctg} \beta_{2y} \left( 1 + \frac{K}{1 - P - G} \right) \dots \dots \dots (6).$$

Wird nun für das Geschwindigkeitsprofil des Nachlaufes längs einer Schaufelteiung ein universeller Ansatz in Form einer Gaußschen Glockenkurve gemacht, dann läßt sich das Korrek-



turglied  $K$  universell berechnen. Als Parameter des Geschwindigkeitsprofils tritt dabei der Flächeninhalt der Geschwindigkeitsdelle (zurückgeführt auf die Größen  $G$  und  $P$ ) und die Dellentiefe (zurückgeführt auf den maximalen örtlichen Gesamtdruckverlust in der Delle) auf. Die folgende Zahlentafel enthält die berechneten Werte des Korrekturgliedes:

Tabelle 1: Berechnete Werte des Korrekturgliedes  $K$  nach Gl. (3),  $G$  nach Gl. (1),  $P$  nach Gl. (2),  $\alpha = 1 - \frac{1}{1-P} \cdot \frac{g_1 - g_{2y \min}}{g_1}$ .

$\alpha$	$\frac{G}{1-P}$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,16
0,2		0,2431	0,2353	0,2276	0,2199	0,2122	0,2044	0,1967	0,1812
0,3		0,1902	0,1832	0,1761	0,1690	0,1619	0,1548	0,1477	0,1335
0,4		0,1491	0,1425	0,1359	0,1293	0,1227	0,1161	0,1095	0,0963
0,5		0,1156	0,1093	0,1031	0,0969	0,0907	0,0845	0,0782	0,0658
0,6		0,0869	0,0809	0,0751	0,0691	0,0632	0,0573	0,0514	0,0396
0,7		0,0616	0,0559	0,0503	0,0447	0,0390	0,0334	0,0277	0,0165
0,8		0,0389	0,0335	0,0281	0,0227	0,0173	0,0119	0,0065	

Die hiermit berechneten Werte der homogenen Abströmung zeigen vorzügliche Übereinstimmung mit Auswerteergebnissen unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Strömungswinkels  $\beta_{2y}$  in der Meßebene  $2y$ . Die Abweichungen der homogenen Strömung der Ebene 2 gegenüber den Mittelwerten der Meßebene  $2y$  sind vor allem beim Gesamtdruck und statischen Druck beträchtlich. Die hier mitgeteilte Auswertemethode hat sich bei den im Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig durchgeführten Gittermessungen gut bewährt (vgl. [3]).

#### Literatur

- [1] H. Schlichting: Grenzschichttheorie. Verlag Braun, Karlsruhe, (1951).
- [2] A. D. Young: Note on a Method of Measuring Profile Drag by Means of Integrating Comb. ARC Rep. and Mem. No. 2257, (1948).
- [3] H. Schlichting: Ergebnisse und Probleme von Gitteruntersuchungen. Zeitschr. f. Flugwissenschaften Bd. 1, S. 109—122, (1953). Vgl. auch: H. Schlichting: Problems and Results of Cascade Investigations. Journ. Aeron. Sciences, Vol. 21, p. 163—178, (1954).

## Zur Ermittlung von Unterschallströmungen mit der Transformationsmethode bei quadratischer Approximation der Adiabate

Von H. Schubert und E. Schincke in Halle (Saale)

Durch Übergang zur Hodographenebene wird die Kontinuitätsgleichung für die Stromfunktion einer kompressiblen Unterschallströmung um ein gegebenes Profil nicht wie bei Tschapligin und bei Sauer auf die Laplace'sche Potentialgleichung sondern auf die Schwingungsgleichung transformiert und gezeigt, daß die zugehörigen Druck-Dichte-Beziehungen eine quadratische Approximation der Adiabatenkurve gestatten. Ferner wird in der Hodographenebene die Singularität ermittelt, die die Stromfunktion im Bildpunkt der Grundströmung besitzt.

Eine ausführliche Darstellung wird in einem späteren Heft dieser Zeitschrift erscheinen.

## Kegelige Überschallströmung in Schallnähe

Von Klaus Oswatitsch und Lars Sjödin

Die Überschallströmung an Kreiskegeln ist vielfach berechnet worden. In diesem Zusammenhang braucht nur auf die in allen einschlägigen Lehrbüchern zitierten Arbeiten von G. J. Taylor — J. W. Macoll, A. Busemann und auf die Tabellen von Z. Kopal hingewiesen werden. Dabei handelt es sich stets um die numerische Integration einer gewöhnlichen, nicht linearen Differentialgleichung, die keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten bietet, wenn auch zwischen Kopfwelle und Kegelmantel in Schallnähe Übergänge von Überschall- zu Unterschallströmungen auftreten. Wenn das Problem der Überschallanströmung von Kreiskegeln für beliebig dünne Körper und für Machzahlen der Anströmung  $M_\infty$  beliebig nahe an Eins ( $M_\infty \rightarrow 1$ ) demnach grundsätzlich gelöst erscheint, solange nur die Kopfwelle anliegt, so besteht dennoch ein Bedarf für die Lösungen bei schlanken Kegeln in Schallnähe. In diesem Gebiet reichen die vorhandenen Tabellen und Diagramme in keiner Weise aus. Aus diesen lassen sich keine allgemein gültigen Formeln und Ähnlichkeitsgesetze für Schallnähe ableiten und es fehlt der Anschluß an die üblichen Methoden für schlanke Körper in Schallnähe.

Was diesen ersten und längeren Teil des Vortrages angeht, handelt es sich also um die methodische Aufgabe der Darstellung der kegeligen Strömung an Kreiskegeln in Schallnähe. Dabei unterscheiden sich die Resultate nur in ihrer Darstellungsweise von einer schon früher ausgeführten, aber nur in Berichtform vorhandenen Arbeit von v. B a r a n o f f.

Ausgehend von der Kreiskegelströmung ist es dann nicht mehr schwer mit Hilfe des Äquivalenzsatzes von O s w a t i t s c h Aussagen über beliebige kegelige Strömungen in Schallnähe zu machen.

## Zur Wechselwirkung zwischen Rumpf und Tragflügel bei Überschallgeschwindigkeit

Von *H. J. Stetter* in München

Zur Bestimmung der Überschallströmung um eine Rumpf-Tragflügelkombination in lineari-sierter Näherung hat man einerseits die Methoden der „slender body theory“ und andererseits einige strenge Verfahren von F e r r a r i, M o r i k a w a, N i e l s e n u. a. Erstere liefern sehr schlechte Ergebnisse, letztere sind für allgemeinere Fälle durchweg recht kompliziert.

In Verallgemeinerung einer Überlegung dieser Autoren wurde im Referat gezeigt, wie man ohne große rechnerische Schwierigkeiten zu praktisch recht brauchbaren Ergebnissen kommt. Die zunächst vorliegende allgemeine Anfangs- und Randwertaufgabe für die Wellengleichung wird dadurch vereinfacht, daß man zwar die Einwirkung des Rumpfes auf den Flügel voll berücksichtigt, die Rückwirkung des Flügels auf den Rumpf jedoch weitgehend vernachlässigt. Die vereinfachte Aufgabe läßt sich mit Hilfe des Kalküls der Distributionstheorie allgemein lösen und liefert in einem Teil des Flügels die strengen Strömungswerte, im Restbereich eine obere Grenze für die wahren Werte (Trennungslinie zwischen den beiden Bereichen: die vom Flügelansatzpunkt ausgehende M a c h linie).

Für den Fall eines aus einem unendlich-langen Zylinder bestehenden Rumpfes wurden die Ergebnisse der Berechnungen an zwei Beispielen gezeigt. Der von der Rumpfeinwirkung her-rührende Zusatzdruck verläuft von seinem Maximum am vorderen Flügelansatzpunkt längs der von diesem ausgehenden M a c h linie in einem „Grat“. Ferner zeigt sich, daß für eine grobe Abschätzung der Wechselwirkung bei verschiedenen Flügeln mit Überschallvorderkante in einem größeren M a c h zahlenbereich eine einzige Tabelle genügt.

## Lignes de courant limites à la paroi pour l'aile droite d'envergure infinie dérapée

de *Adalbert Oudart* à Paris

Il s'agit du comportement des lignes de courant pariétales de couche limite aux abords de la génératrice de séparation du bord d'attaque et aux abords de la génératrice de décollement pour l'aile droite d'envergure infinie dérapée, en fluide incompressible.

Que l'on considère le fluide parfait ou le fluide visqueux, il existe une surface  $\Sigma$  qui délimite en amont de l'aile les deux nappes fluides enveloppant l'aile. Sur cette surface  $\Sigma$ , les particules fluides décrivent des lignes de courant qui se déduisent toutes de l'une d'elles par une translation parallèle aux génératrices du cylindre constituant la surface extérieure de l'aile.

On démontre dans les deux cas que ces lignes de courant sont pratiquement tangentes à la génératrice de séparation et s'y dédoublent en fourche en conservant cette génératrice pour tangente. En fait, théoriquement cette génératrice de séparation est en général une asymptote. On démontre aussi que la fourche, est 2,18 fois plus ouverte en écoulement visqueux qu'en écoulement parfait.

Mutatis mutandis, la ligne de courant limite est tangente ou asymptote à la génératrice de décollement: ce point s'éclaircit également pour le cas du décollement laminaire, ce qui n'a pas échappé à S e a r s et à W i l d.

L'expérience, même en fluide compressible, confirme les comportements théoriques précisés par la présente communication avec laquelle les figures données par S e a r s et H a y e s sont grosso-modo en accord. A noter que la figure obtenue par W i l d <sup>1)</sup> exige une modification au bord d'attaque.

<sup>1)</sup> Cf. H. S c h l i c h t i n g, Grenzschichttheorie p 164. Bild 108.



## Das Wandgesetz turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg

Von *W. Szablewski* in Berlin

Die theoretische Behandlung turbulenter Grenzschichtströmungen mit mittlerem und starkem Druckanstieg erfordert die Berücksichtigung des Einflusses des Druckgradienten bis zur Wand hin. Unter Zugrundelegung des *P r a n d t l*schen Schubspannungsansatzes wird als Verallgemeinerung des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes ein Wandgesetz abgeleitet, das diesem Einfluß in Wandnähe Rechnung trägt. Die empirischen Koeffizienten des Wandgesetzes sind die beiden empirischen Koeffizienten des logarithmischen Gesetzes und vom Druckgradienten der Strömung unabhängig. Das Wandgesetz kann unter Umständen dazu dienen, die Wandschubspannung aus der experimentellen Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe zu bestimmen<sup>1)</sup>.

## Berechnungsmethoden von *L a v a l*düsen auf Grund eines Formelsystems für die Strömung in der Düsenkehle

Von *W. Haack* und *J. Zierep* in Berlin

$w, \vartheta$  seien die Polarkoordinaten des Geschwindigkeitsvektors einer Gasströmung durch eine *L a v a l*düse, deren Meridian  $f(x)$  ist. In der Umgebung der Düsenkehle, wo der Übergang von Unter- zu Überschallgeschwindigkeit erfolgt, werden  $w, \vartheta$  durch Reihen nach Potenzen von  $x, r/f$  dargestellt. Die so gewonnenen Formeln dienen als Ausgang für das Charakteristikenverfahren im Überschallgebiet. Als Anwendung wird die Methode zur Berechnung einer rotationssymmetrischen Parallelstrahldüse und einer Kegeldüse mit idealer Quellströmung und schließlich eines ebenen Krümmers ausführlich erläutert; dabei kann stets erreicht werden, daß die Beschleunigung stetig ist. Ausführliche Veröffentlichung in *Z. f. Flugwiss.* 1954, Heft 2.

<sup>1)</sup> Publikation im *Ing.-Archiv*, Bd. 22 (1954).

### Referate folgender Vorträge sind nicht eingegangen:

*W. B a d e r*, Berlin: Die Düsenströmung in vereinfachter Betrachtung.

*U. D o m m*, Berlin: Die Stabilität der Kármánschen Wirbelstraße unter Berücksichtigung realer Geschwindigkeitsprofile der Einzelwirbel.

*E. E i c h e l b r e n n e r*, Paris: Eine Verallgemeinerung der Theorie der schlanken Körper.

*O. E m e r s l e b e n*, Berlin u. Greifswald: Über eine doppeltperiodische Parallelströmung zäher Flüssigkeiten (die Arbeit wird in dieser Zeitschrift erscheinen.)

*E. E u j e n*, Braunschweig: Bemerkungen zur Durchflußmessung mit Drosselmeßgeräten bei kleinen *Re*-Zahlen.

*K. M a n g l e r*, Farnborough: Berechnung der Druckverteilung für einen langsam schwingenden Flügel in der Nähe der Schallgeschwindigkeit.

*M. S c h ä f e r*, Göttingen: Über die stetige Rückkehr von Überschallströmungen in den Unterschallbereich bei gemischten Strömungsfeldern (eine ausführliche Arbeit über dieses Thema wird im „*Journal of Rational Mechanics and Analysis*“ erscheinen).

*W. W u e s t*, Göttingen: Asymptotische Absäuge-Grenz-Schichten an längsangeströmten zylindrischen Körpern.

### Ferner ist das Referat des Vortrages von

*H. G e b e l e i n*, Bamberg: Vielfachkorrelation und Hauptachsentransformation nicht eingegangen.

# Über das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen

Von D. Grohne in Göttingen

(Aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung)

*Die Stabilitätsuntersuchung einer Laminarströmung nach der Methode der kleinen Schwingungen führt mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung auf eine nicht selbstadjungierte Randwertaufgabe. Von den Eigenschwingungen dieser Randwertaufgabe hat man bisher vorwiegend die neutralen und angefachten betrachtet. In der vorliegenden Arbeit soll nun das gesamte Spektrum der Eigenwerte  $c$  sowie die Gestalt der Eigenschwingungen untersucht werden.*

*If the stability of a laminar flow is investigated by the method of small oscillations, a non-self-adjoint boundary problem must be solved following from an ordinary differential equation of the fourth order. Till now, from the natural oscillations of the problem, preferably the neutral and the incited were considered. The paper deals with the whole spectrum of the characteristic values  $c$  and the shape of the natural oscillations.*

*L'examen de la stabilité d'un courant laminaire suivant la méthodes des petites oscillations conduit à l'aide d'une équation différentielle ordinaire de quatrième ordre à un problème non adjoint de valeur marginale. Des oscillations propres de ce problème de valeur marginale on a considéré jusqu'à présent par préférence de neutres et stimulées. Dans l'article en question le spectre entier des valeurs propres  $c$  ainsi que la forme des oscillations propres va être examinée.*

Исследование устойчивости ламинарного течения по методу малых колебаний приводит, при обыкновенном дифференциальном уравнении четвертого порядка, к несамо-сопряженной краевой задаче. Из числа всех собственных колебаний этой краевой задачи до сих пор преимущественно рассматривались нейтральные и возбужденные. Цель настоящей работы состоит в исследовании всего спектра собственных значений  $c$ , а также формы собственных колебаний.

## 1. Einführung und Problemstellung

Bei der Untersuchung einer ebenen Laminarströmung auf Stabilität gegenüber kleinen Störungen beschreibt man eine stromabwärts (in Richtung der  $x$ -Achse) wandernde Störung der Stromfunktion durch den „Partialwellenansatz“

$$\psi = \varphi(y) \cdot e^{i\alpha(x-ct)} \quad (1.1),$$

und erhält alsdann für die Verteilung der Störampplitude  $\varphi(y)$  senkrecht zur Hauptströmung die sog. Stabilitätsdifferentialgleichung 4. Ordnung

$$(U - c) \cdot (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = \frac{1}{i\alpha R} (\varphi^{(4)} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi) \quad (1.2),$$

worin  $U(y)$  das Geschwindigkeitsprofil der in  $x$ -Richtung fließenden Laminarströmung bezeichnet. Hinzukommen die hier auf den Parallelkanal bezüglichen Randbedingungen

$$\varphi(\pm 1) = 0, \quad \varphi'(\pm 1) = 0 \quad (1.3),$$

welche das Haften auch der gestörten Strömung an den begrenzenden Wänden zum Ausdruck bringen. In diesen Gleichungen sind die Geschwindigkeiten  $U$  und  $c$  auf eine Bezugsgeschwindigkeit  $U_0$  bezogen, ferner die Längen  $x$ ,  $y$  und  $1/\alpha$  auf die halbe Kanalbreite  $b$ , und schließlich die Zeit  $t$  auf die Zeiteinheit  $b/U_0$ . Die Reynolds'sche Zahl  $R$  ist definiert durch

$$R = \frac{U_0 b}{\nu}.$$

Die aus Differentialgleichung und Randbedingungen bestehende Randwertaufgabe bestimmt zu jedem Parameterpaar  $\alpha$  und  $R$  ein Spektrum unendlich vieler Eigenwerte  $c_n$ . Die zugehörigen Störungen (1.1) verlaufen gedämpft, wenn  $\text{Im}(c_n) < 0$ , dagegen angefacht, wenn  $\text{Im}(c_n) > 0$  ist;  $\alpha$  wird als positiv reell angenommen. Eine Grundströmung heißt für einen  $R$ -Wert stabil, wenn das gesamte Eigenwertspektrum  $c_n$  für alle möglichen Werte von  $\alpha$  nur gedämpfte Störungen enthält. Durch diese Begriffsbildung wird der Bereich der Reynolds'schen Zahl  $R$  in einen Stabilitätsbereich  $0 < R < R^*$  und in einen Instabilitätsbereich  $R > R^*$  aufgeteilt, die beide durch die Stabilitätsgrenze  $R^*$  voneinander getrennt werden.

Da in der bisherigen Literatur fast ausschließlich neutrale, allenfalls angefachte Schwingungen untersucht worden sind, soll in der vorliegenden Arbeit auf Anregung von Herrn Prof. Dr. W. Tollmien das gesamte Spektrum der Eigenwerte  $c_n$  in seiner Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $R$  untersucht werden, wobei zur Vereinfachung der Nachdruck auf die Abhängigkeit von  $\alpha R$  gelegt sein möge. Eine geschlossene Lösung dieser Aufgabe ist in den beiden folgenden Sonderfällen möglich: 1. in dem mit  $U = 0$  gleichwertigen Falle  $U = \text{const.}$  Es handelt sich um die bereits von Lord Rayleigh behandelten „Schwingungen auf einer ruhenden Flüssigkeit“. Die Lösung



ist möglich im Bereich der elementar-transzendenten Funktionen. Der zweite Sonderfall betrifft die von L. H o p f [5] untersuchte geradlinige C o u e t t e -Strömung  $U = y$ . Die Lösung ist auf tabulierte B e s s e l -Funktionen zurückführbar.

Bei allgemeineren Geschwindigkeitsprofilen  $U(y)$  können die Eigenwerte  $c_n$  in den folgenden Grenzfällen analytisch-approximativ bestimmt werden:

- I. im Grenzfalle  $\alpha R \rightarrow 0$  bei beliebiger Ordnung  $n$  der Eigenwerte  $c_n$ ,
- II. im Grenzfalle  $n \rightarrow \infty$  bei festgehaltenem  $\alpha R$ .
- III. im Grenzfalle  $\alpha R \rightarrow \infty$  bei beschränkter Ordnung  $n$ .

Eine stetige Überführung der drei Fälle ineinander bei gleichbleibender Indizierung ist in den obengenannten Sonderfällen  $U = 0$  und  $U = y$  möglich. Die Indizierung der Eigenwerte  $c_n$  kann in den Fällen I und II nach wachsender Dämpfung erfolgen, d. h. nach der Vorschrift

$$Im(c_{n+1}) \leq Im(c_n) \quad \dots \quad (1.4).$$

Diese Vorschrift ist jedoch nicht immer auf den Fall III anwendbar, wenn die Indizierung bei stetiger Änderung von  $\alpha$  und  $R$  gleichbleiben soll.

Die in (1.2), (1.3) formulierte Randwertaufgabe ist im allgemeinen nicht selbstadjungiert, womit der Rückgriff auf die bekannten Aussagen und Abschätzungen der S t u r m - L i o u - v i l l e -schen Theorie entfällt. Die Eigenfunktionen bilden im allgemeinen kein Orthogonalsystem. Sie bilden jedoch, wie O. H a u p t [3] gezeigt hat, unter gewissen Voraussetzungen ein Funktionensystem, welches bezüglich jeder der Randbedingungen (1.3) genügenden und viermal stetig differenzierbaren Funktion vollständig ist, und in ein Orthogonalsystem umgewandelt werden kann.

## 2. Die Grenzfälle $\alpha R \rightarrow 0$ bei beliebiger Ordnung $n$ der Eigenwerte $c_n$ sowie $n \rightarrow \infty$ bei beschränktem $\alpha R$

Wie bereits Lord R a y l e i g h [8] fand, läßt sich das gesamte System der Eigenfunktionen und Eigenwerte im Falle der Grundströmung  $U = 0$ , d. h. bei einem ruhenden Medium geschlossen angeben. Da diese Eigenwerte auch bei allgemeineren Grundströmungen zu approximativen Darstellungen geeignet sind, seien sie hier kurz hergeleitet. Im Falle der Grundströmung  $U = 0$  vereinfacht sich die Stabilitätsdifferentialgleichung (1.2) auf

$$\Phi^{(4)} - 2\alpha^2 \Phi'' + \alpha^4 \Phi + i\alpha R \cdot C(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) = 0 \quad \dots \quad (2.1),$$

wobei die Eigenwerte zur Unterscheidung von den Eigenwerten  $c$  der allgemeinen Stabilitätsdifferentialgleichung mit  $C$  bezeichnet seien. Die Gleichung wird gelöst durch jede der Funktionen

$$\Phi_I(y) = \mathfrak{Cof} \omega y - \mathfrak{Cof} \alpha y \frac{\mathfrak{Cof} \omega}{\mathfrak{Cof} \alpha}, \quad \Phi_{II}(y) = \mathfrak{Sin} \omega y - \mathfrak{Sin} \alpha y \frac{\mathfrak{Sin} \omega}{\mathfrak{Sin} \alpha} \quad \dots \quad (2.2),$$

wenn

$$\omega^2 = \alpha^2 - i\alpha R \cdot C \quad \dots \quad (2.3)$$

gesetzt wird. Der Anteil  $\Phi(\pm 1) = 0$  der Randbedingungen wird identisch erfüllt. Die restlichen Randbedingungen  $\Phi'(\pm 1) = 0$  führen auf die diesbezüglichen Zweige der Eigenwertgleichung:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha \mathfrak{I}g \alpha = \omega \mathfrak{I}g \omega & \text{im Falle I,} \\ \alpha \mathfrak{Cot}g \alpha = \omega \mathfrak{Cot}g \omega & \text{im Falle II} \end{array} \right\} \quad \dots \quad (2.4).$$

Die Gleichungen (2.4) haben zu positivem  $\alpha$  keine Wurzeln  $\omega$  außerhalb der imaginären Achse der komplexen  $\omega$ -Ebene. Mit  $\omega$  ist auch  $-\omega$  ein Eigenwert zur gleichen Eigenfunktion. Es genügt deswegen, nur die positiv-imaginären Eigenwerte  $\omega$  zu betrachten. Bezeichnet man gerade Eigenfunktionen mit geradem Index und ungerade Eigenfunktionen mit ungeradem Index, so mögen die Gln. (2.4) die Lösungen

$$\omega_0, \omega_2, \omega_4, \dots \text{ im Falle I} \quad \text{und} \quad \omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots \text{ im Falle II}$$

besitzen. Es läßt sich stets erreichen, daß die Eigenwerte eine monotone Folge

$$0 < \frac{\omega_0}{i} < \frac{\omega_1}{i} < \frac{\omega_2}{i} < \dots$$

bilden. Die zugehörigen Eigenwerte  $C_n$  lauten nach (2.3)

$$C_n = \frac{\alpha^2 + \left(\frac{\omega_n}{i}\right)^2}{i\alpha R} \quad \dots \quad (2.5);$$

sie sind also im Sinne wachsender Dämpfung angeordnet. Der  $n$ -te Eigenwert läßt sich nach oben und unten abschätzen durch

$$\alpha^2 + \pi^2 \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 < i\alpha R \cdot C_n < \alpha^2 + \pi^2 \left( \frac{n}{2} + 1 \right)^2 \quad \dots \quad (2.6)$$

Aus der Darstellung (2.5) geht hervor, daß die Eigenwerte  $C$  sowohl für  $\alpha R \rightarrow 0$  als auch für  $n \rightarrow \infty$  sehr groß werden. Dasselbe Verhalten findet nun auch bei allgemeineren Geschwindigkeitsprofilen  $U(y)$  statt, denn die Hauptanteile in der Stabilitätsdifferentialgleichung (1.2) werden dann durch die Gl. (2.1) dargestellt. Wir wollen diesen Gedankengang jetzt dadurch präzisieren, daß wir die Differenz  $c - C$  der Eigenwerte  $c$  bei allgemeineren Profilen gegenüber dem Eigenwert  $C$  der Gl. (2.1) einer genaueren Abschätzung unterwerfen. Unter Einführung der Differentialoperatoren

$$L[\varphi] = U(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U''\varphi, \quad M[\varphi] = \varphi'' - \alpha^2 \varphi, \quad N[\varphi] = \varphi^{(4)} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi \quad \dots \quad (2.7)$$

läßt sich die Stabilitätsdifferentialgleichung (1.2) in der Form schreiben

$$\left. \begin{aligned} c \cdot M[\varphi] &= L[\varphi] - \frac{1}{i\alpha R} \cdot N[\varphi] \\ \text{Entsprechend lautet (2.1)} \quad C \cdot M[\Phi] &= -\frac{1}{i\alpha R} \cdot N[\Phi] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2.8)$$

Unter Ausnutzung der Selbstadjungiertheit der Operatoren  $M$  und  $N$  erhält man aus diesen beiden Gleichungen die Beziehung

$$(c - C) \int_{-1}^{+1} \varphi M[\Phi] dy = \int_{-1}^{+1} \Phi L[\varphi] dy \quad \dots \quad (2.9)$$

Wird die für  $\varphi$  noch freie Normierung durch die Vorschrift

$$\int_{-1}^{+1} M[\Phi] \cdot dy = \int_{-1}^{+1} \Phi M[\Phi] dy \quad \dots \quad (2.10)$$

festgelegt, so folgt nach Einführung der Hilfsgrößen

$$Q = \frac{\int_{-1}^{+1} \Phi L[\Phi] dy}{\int_{-1}^{+1} \Phi M[\Phi] dy}, \quad q = \frac{\int_{-1}^{+1} \Phi L[\varphi - \Phi] dy}{\int_{-1}^{+1} \Phi M[\Phi] dy} \quad \dots \quad (2.11)$$

aus (2.9) die Darstellung

$$c - C = Q + q \quad \dots \quad (2.12)$$

Hierin können  $C$  und  $Q$  als vermöge der in (2.2) dargestellten Funktionen  $\Phi$  bekannt angesehen werden. Die Eigenwerte  $C_n$  wurden bereits in (2.6) eingegrenzt. Für  $Q$  erhält man direkt die Abschätzung

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} U \cdot dy + O\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad |\omega| \gg 1 \quad \dots \quad (2.13)$$

Für  $q$  erhält man in Verbindung mit einer simultanen Abschätzung der Funktion  $(\varphi - \Phi)'' - \alpha^2(\varphi - \Phi)$  die Abschätzung

$$q = O\left(\frac{i\alpha R}{\omega}\right) \quad \text{für} \quad \frac{\alpha R}{\omega} \rightarrow 0 \quad \dots \quad (2.14)$$

Setzt man beides in (2.12) ein, so erhält man unter Beachtung von (2.5), (2.6) die beiden Teilaussagen

$$c_n - C_n = Q_n + O\left(\frac{\alpha R}{n+1}\right) \quad \text{für} \quad \alpha R \rightarrow 0 \text{ und bei beliebiger Ordnung } n \quad (2.15a),$$

$$c_n - C_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} U \cdot dy + O\left(\frac{\alpha R}{n}\right) \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty \text{ bei festem } \alpha R \quad (2.15b).$$

Die letztere Abschätzung besagt, daß die Eigenwerte  $c_n$  der Stabilitätsdifferentialgleichung bei genügend hoher Ordnung  $n$  schließlich gegen die (im Realteil um die mittlere Geschwindigkeit der Grundströmung vermehrten) Eigenwerte  $C_n$  der „Strömung Null“ [vgl. (2.1)] streben. Eine



gegenseitige Zuordnung der Eigenwerte  $c_n$  zu den Eigenwerten  $C_n$  ist aber vermöge (2.15b) nur dadurch sinnvoll, daß die Differenz  $|C_n - C_{n+1}|$  der Näherungseigenwerte wesentlich größer ausfällt als der Abschätzungsrest in (2.15b). Es gilt nämlich zufolge (2.5) und (2.6)

$$|C_n - C_{n+1}| \geq \text{const} \cdot \left(\frac{n}{\alpha R}\right) \dots \dots \dots (2.16).$$

Es sei erwähnt, daß bereits F. N o e t h e r [7] auf S. 239, Formel (28) eine asymptotische Darstellung für etwas anders definierte Eigenwerte bei unbegrenzt wachsender Ordnung angegeben hat, allerdings nur unter Andeutung eines Beweises, der beträchtliche Schwierigkeiten vermuten läßt.

Erwähnt sei weiter eine von C. S. M o r a w e t z [6], S. 580 angegebene Abschätzung für die Eigenwerte  $c$

$$|c - c_n| < \Delta \cdot (\alpha R)^{-1/2},$$

wobei  $c_n$  ein Näherungseigenwert ist, der (in unserer Bezeichnungsweise) durch die Gleichung

$$\text{Im} \int_{-1}^{+1} \sqrt{i(U - c_n)} \cdot dy = \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha R}}$$

bestimmt ist und etwa unserm in Gl. (2.1) eingeführten Näherungseigenwert  $C_n$  entspricht. In der vorstehenden Abschätzung von M o r a w e t z dürfen aber weder  $\alpha R$  noch  $n$  beliebig groß werden; denn im ersten Falle würden die Eigenwerte in die ausgeschlossene Nachbarschaft von  $c = w(y_1)$  ( $w = U$ ;  $y_1$  bezeichnet die Wand) rücken, und im anderen Falle würde die Abschätzung inhaltslos, da das Verhalten der Größe  $\Delta$  für unbegrenzt wachsendes  $n$  nicht mitgeteilt wird.

### 3. Geradlinige Couetteströmung. Der Grenzfall $\alpha R \rightarrow \infty$ bei endlicher Ordnung $n$

Im Sonderfall der ruhenden Grundströmung  $U = 0$  wird das Verhalten der Eigenwerte  $c_n$  für unbegrenzt wachsendes  $\alpha R$  durch die Formel (2.5) beschrieben, in welcher die Größen  $\omega_n$  nicht mehr von  $\alpha R$  abhängen. Abweichend von diesem Gesetz ergibt sich bei allgemeineren Geschwindigkeitsprofilen ein Verhalten wie

$$c_n - U(-1) \cong \frac{\Gamma_n}{\sqrt[3]{\alpha R}} \quad \text{für } \alpha R \rightarrow \infty \quad \dots \dots \dots (3.1),$$

worin die komplexwertigen Größen  $\Gamma_n$  nicht mehr von  $\alpha R$  abhängen. Werden diese Eigenwerte  $c_n$  durch stetigen Übergang von  $\alpha$  und  $\alpha R$  an die Eigenwerte (2.15a) angeschlossen, so geht bereits in Sonderfällen wie der geradlinigen Couetteströmung das Ordnungsprinzip (1.4) nach wachsender Dämpfung verloren. Will man also eine gleichbleibende Indizierung der Eigenwerte  $c_n$  bei stetiger Überführung der Grenzfälle  $\alpha R \rightarrow 0$  und  $\alpha R \rightarrow \infty$  ineinander erzielen, so muß man diesen Vorgang auch tatsächlich durchführen, was eine geschlossene oder nur soweit approximative Lösung des Eigenwertproblems voraussetzt, als die einzelnen Eigenwerte noch voneinander unterscheidbar bleiben. Eine Lösung in diesem Sinne ist uns nur im Sonderfall der geradlinigen Couetteströmung gelungen. Sie möge deswegen den Gegenstand des folgenden Abschnittes bilden.

Nach Einsetzen des Geschwindigkeitsprofils  $U = y$  der geradlinigen Couetteströmung in die Stabilitätsdifferentialgleichung (1.2) ist diese mittels der Substitution

$$\psi = \varphi'' - \alpha^2 \varphi \dots \dots \dots (3.2)$$

auf die B e s s e l'sche Differentialgleichung in der Nebenform

$$\psi'' - [i\alpha R(y - c) + \alpha^2] \psi = 0 \dots \dots \dots (3.3)$$

reduzierbar. Um über die Randbedingungen zu den Eigenwerten zu gelangen, werde (3.2) in der Form

$$\varphi(y) = \int_{-1}^y \psi(\eta) \frac{\sin \alpha(y - \eta)}{\alpha} d\eta \dots \dots \dots (3.4)$$

umgekehrt. Die Randbedingungen  $\varphi(-1) = \varphi'(-1) = 0$  sind dann identisch erfüllt; die restlichen Randbedingungen  $\varphi(+1) = \varphi'(+1) = 0$  verlangen das Bestehen der beiden Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} \dot{\psi}(y) \cdot \frac{\sin \alpha y}{\alpha} dy = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \psi(y) \cos \alpha y dy = 0. \dots \dots \dots (3.5).$$

Die Differentialgleichung (3.3) ist mittels der Substitution

$$y - y_k = \varepsilon \eta \quad \text{mit} \quad \varepsilon = (\alpha R)^{-1/3} \quad \text{und} \quad y_k = c + \frac{i\alpha^2}{\alpha R} \dots \dots \dots (3.6)$$

in die Differentialgleichung

$$i \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} + \eta \psi = 0 \dots \dots \dots (3.7)$$

überführbar.

Seien

$$\psi_I(\eta) \quad \text{und} \quad \psi_{II}(\eta) \dots \dots \dots (3.8)$$

zwei geeignete Fundamentallösungen dieser Gleichung, und bezeichne  $\eta_{-1}, \eta_{+1}$  die vermöge (3.6) den Wänden  $y = -1$  und  $y = +1$  zugeordneten Werte

$$\eta_{-1} = \frac{1}{\varepsilon} \left( -1 - c - \frac{i\alpha^2}{\alpha R} \right), \quad \eta_{+1} = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - c - \frac{i\alpha^2}{\alpha R} \right) \dots \dots \dots (3.9),$$

so folgt aus (3.5) die Eigenwertgleichung

$$\int_{\eta_{-1}}^{\eta_{+1}} \psi_I(\eta) \frac{\Im \sin \alpha \varepsilon \eta}{\alpha \varepsilon} d\eta \cdot \int_{\eta_{-1}}^{\eta_{+1}} \psi_{II}(\eta) \Re \sin \alpha \varepsilon \eta d\eta - \int_{\eta_{-1}}^{\eta_{+1}} \psi_{II}(\eta) \frac{\Im \sin \alpha \varepsilon \eta}{\alpha \varepsilon} d\eta \cdot \int_{\eta_{-1}}^{\eta_{+1}} \psi_I(\eta) \Re \sin \alpha \varepsilon \eta d\eta = 0 \quad (3.10).$$

Zur weiteren Behandlung dieser Gleichung empfiehlt sich die Einführung einer Folge von Funktionen  $A_n(\eta)$  durch das L a p l a c e-Integral

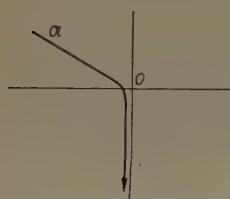


Bild 1. Integrationsweg  $\mathfrak{U}$  in der komplexen  $z$ -Ebene

$$A_n(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{U}} e^{\eta z + i \frac{z^3}{3}} \cdot z^{n-1} \cdot dz \dots \dots \dots (3.11),$$

in welchem der Integrationsweg  $\mathfrak{U}$  in der in Bild 1 gezeichneten Weise vom Unendlichen ins Unendliche läuft. Die Funktionen  $A_n(\eta)$  genügen der Differentialformel

$$\frac{dA_n(\eta)}{d\eta} = A_{n+1}(\eta) \dots \dots \dots (3.12)$$

und der Rekursionsformel

$$i \cdot A_{n+3} + \eta \cdot A_{n+1} + n \cdot A_n = 0 \dots \dots \dots (3.13),$$

mittels derer die Gesamtheit der Funktionen  $A_n(\eta)$  und ihrer Integrale und Ableitungen aus den drei Grundfunktionen

$$A_0(\eta), \quad A_1(\eta), \quad A_2(\eta) \dots \dots \dots (3.14)$$

rekursiv aufgebaut werden kann.

Die Bedeutung dieser Funktionen  $A_n(\eta)$  für das Stabilitätsproblem liegt darin, daß die beiden in der Eigenwertgleichung (3.10) benötigten Partikularlösungen der Differentialgleichung (3.7) darstellbar sind in der Form

$$\psi_I(\eta) = A_1(\eta), \quad \psi_{II}(\eta) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot A_1\left(\eta \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \dots \dots \dots (3.15).$$

Das Erfülltsein der Differentialgleichung (3.7) folgt aus den Formeln (3.12) und (3.13). Die lineare Unabhängigkeit der beiden Funktionen folgt aus dem Nichtverschwinden der ja konstanten W r o n s k i s c h e n Determinante an der Stelle  $\eta = 0$ .

Die Grundfunktionen  $A_1(\eta)$  und  $A_2(\eta) = A_1'(\eta)$  sind (in etwas anderer Bezeichnungsweise) von H. H. A i k e n [1] für ein quadratisches Punktgitter mit der Maschenweite 0,1 innerhalb des Kreises  $|\eta| \leq 6$  der komplexen  $\eta$ -Ebene numerisch vertafelt worden. Die Grundfunktion  $A_0(\eta) = \int A_1(\eta) d\eta$  kann daraus durch eine numerische Integration beschafft werden.

Außerhalb dieser Tafel kann das Verhalten der Funktionen  $A_n(\eta)$  aus der asymptotischen Reihendarstellung

$$A_n(\eta) \cong \eta^{\left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4}\right)} \cdot e^{\frac{3}{4}(-i\eta)^{3/2}} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_{n,v}}{\eta^{v/2}} \dots \dots \dots (3.16),$$

erschlossen werden, welche für  $|\eta| \rightarrow \infty$  im Winkelraum  $-\frac{7\pi}{6} + \delta \leq \arg \eta \leq \frac{5\pi}{6} - \delta$  mit be-



liebig kleinem  $\delta > 0$  zu Recht besteht. Nach H. Holstein [4] lautet der erste Koeffizient der Reihe

$$a_{n,0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-i\pi\left(\frac{3n}{4} + \frac{1}{8}\right)} \dots \dots \dots (3.16a).$$

Die asymptotischen Reihen sind mittels der Riemannschen Paßmethode unmittelbar aus dem Laplace-Integral (3.11) erhältlich.

Für die Eigenwertdarstellung werden die Nullstellen  $\eta_N$  der Funktion  $A_0(\eta)$  benötigt. Eine asymptotische Berechnung dieser Nullstellen für  $|\eta_N| \gg 1$  ist mittels (3.16) nicht unmittelbar möglich, da die Nullstellen aus dem Gültigkeitsbereich dieser Darstellung herausrücken würden. Man umgeht diese Schwierigkeit durch Anwendung der zweiten der aus dem Integral (3.11) erhältlichen Relationen

$$A_n\left(\eta e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) = e^{\frac{i\pi n}{3}} \cdot A_n^*\left(\eta^* \cdot e^{-\frac{i\pi}{6}}\right) \dots \dots \dots (3.17)$$

(\* = konjugiert komplexe Werte)

und

$$A_n(\eta) + e^{\frac{i2\pi n}{3}} A_n\left(\eta e^{\frac{i2\pi}{3}}\right) + e^{\frac{i4\pi n}{3}} A_n\left(\eta e^{\frac{i4\pi}{3}}\right) = P_n(\eta) \dots \dots \dots (3.18),$$

worin die Polynome  $P_n(\eta)$  vom Grade  $-n$  derselben Rekursionsformel (3.13)

$$i \cdot P_{n+3} + \eta P_{n+1} + n P_n = 0 \dots \dots \dots (3.19)$$

mit den Anfangselementen

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0$$

genügen.

Kombination der Formeln (3.16) und (3.18) liefert alsdann die für  $|z| \rightarrow \infty$  im Winkelraum  $|\arg z| < \pi - \delta$  gültige asymptotische Darstellung

$$A_0\left(z e^{\frac{i5\pi}{6}}\right) \cong 1 - \frac{\cos\left(\frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot z^{3/4}} \dots \dots \dots (3.20).$$

Hieraus folgt für die Nullstellen  $\eta_N$  von  $A_0(\eta_N) = 0$ , die nach (3.17) paarweise symmetrisch zur Graden  $\arg = 5\pi/6$  liegen, die asymptotische Darstellung

$$\eta_N \cong (3\pi n)^{2/3} \cdot e^{i\left[\frac{5\pi}{6} \pm \frac{\ln(n \cdot 2\pi\sqrt{3})}{3\pi n}\right]}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (3.21).$$

Das niederste Nullstellenpaar wurde nach der Tafel von Aiken [1] zum Werte

$$\eta_N = 4,257 \cdot e^{i\left[\frac{5\pi}{6} \pm 0,2708\right]} \dots \dots \dots (3.21a)$$

berechnet.

Zur Weiterbehandlung der Eigenwertgleichung (3.10) empfiehlt es sich, die Funktionen  $\text{Sin } \alpha \varepsilon \eta$  und  $\text{Cos } \alpha \varepsilon \eta$  in ihre Taylorreihen zu entwickeln und alsdann die Summation mit der Integration zu vertauschen, was durch einen Satz von Bromwich (vgl. [2], S. 398) gerechtfertigt wird. Die erhaltenen Reihen konvergieren nach Sätzen der Laplace-Transformation für jeden Wert von  $\alpha \varepsilon$ . Werden diese Reihen nach den ersten Gliedern abgebrochen, mit Restgliedern versehen und in die Eigenwertgleichung (3.10) eingesetzt, so vereinfacht sich diese deswegen unter Beachtung von (3.17) auf

$$\begin{vmatrix} A_0(\eta_1) - A_0(\eta_{-1}), & A_0^*(-\eta_1^*) - A_0^*(-\eta_{-1}^*) \\ A_2(\eta_1) - A_2(\eta_{-1}), & A_2^*(-\eta_1^*) - A_2^*(-\eta_{-1}^*) \end{vmatrix} = 0(\alpha^2 \varepsilon^2) \quad \text{für} \quad |\eta_1| \leq \text{const} \quad (3.24).$$

Was geschieht jetzt, wenn  $\alpha R$  über alle Grenzen wächst, d. h. wenn  $\varepsilon \rightarrow 0$  strebt? Wegen der aus (3.9) folgenden Beziehung  $\eta_1 - \eta_{-1} = 2/\varepsilon$  muß mindestens eine der beiden Größen  $\eta_1, \eta_{-1}$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  auf einer Parallelen zur reellen Achse ins Unendliche streben. Es genügt, dies bezüglich  $\eta_1$  anzunehmen, denn im anderen Falle würde alles spiegelbildlich zur imaginären Achse der  $\eta$ -Ebene verlaufen (wie ja grundsätzlich bei der Couetteströmung mit  $C$  auch  $-C^*$  ein Eigenwert ist). Unter Beachtung des asymptotischen Verhaltens (3.16) vereinfacht sich dann die Eigenwertgleichung (3.24) auf

$$i \frac{A_0(\eta_{-1})}{A_2(\eta_{-1})} - \frac{\varepsilon}{2} = 0(\varepsilon^2) \quad \text{für} \quad \varepsilon \ll 1 \dots \dots \dots (3.25).$$

An dieser Formel ist erkennbar, daß  $\eta_{-1}$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen die in (3.21) abgeschätzten Nullstellen  $\eta_N$  der Funktion  $A_0(\eta)$  streben muß. Man erhält so für die Eigenwerte  $c$  unter Beachtung von (3.9) die asymptotische Darstellung

$$c + 1 \cong -\varepsilon \eta_N + 0(\varepsilon^2) \quad \text{mit } \eta_N \text{ aus } A_0(\eta_N) = 0 \quad (3.26).$$

Hiermit haben wir die angekündigte Eigenwertformel (3.1) am Sonderfall der Couetteströmung nachgewiesen.

Um den Verlauf der Eigenwerte  $c$  über den ganzen Bereich  $0 \leq \alpha R < \infty$  zu verfolgen, muß man auf die Eigenwertgleichung (3.10) oder ihre Näherungsform (3.24) zurückgreifen, wobei

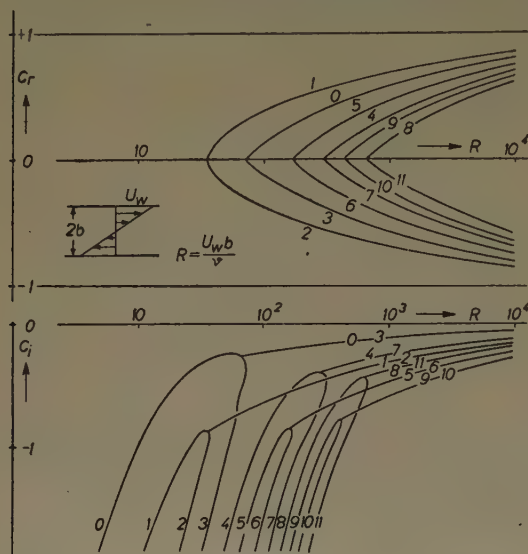


Bild 2. Geradlinige Couetteströmung. Die zwölf niedersten Eigenwerte  $c$  in Abhängigkeit von  $R$  bei  $\alpha = 1$

die Funktionen  $A_0(\eta)$ ,  $A_1(\eta)$ ,  $A_2(\eta)$  als bekannt vorauszusetzen sind. Wir haben hiernach die 12 niedersten Eigenwerte  $c$  in ihrer Abhängigkeit von  $\alpha R$  für einen festen Wert  $\alpha = 1$  berechnet und in Bild 2 dargestellt. Die Veränderlichkeit der Eigenwertkurven mit  $\alpha$  ist nur gering und wird z. B. für  $\alpha R \rightarrow \infty$  mit  $\varepsilon$  klein von der Ordnung  $0(\alpha^2 \varepsilon^2)$ .

Das Eigenwertspektrum der geradlinigen Couetteströmung wurde bereits von L. Hopf [5] diskutiert. Hopf ersetzte etwa auf der Stufe unserer Eigenwertgleichung (3.10) die von ihm durch Hankelfunktionen der Ordnung  $1/3$  dargestellten Lösungen  $\psi_I$ ,  $\psi_{II}$  durch die ersten Glieder ihrer asymptotischen Reihen (3.16), wodurch sich die Eigenwertgleichung auf eine algebraische Gleichung aus Hilfsargumenten sowie Kreis- und Hyperbelfunktionen vereinfachte. Da Hopf jedoch bei den asymptotischen Darstellungen der Hankelfunktionen gewisse Versehen unterlaufen sind, bedürfen seine Ergebnisse teilweiser Korrekturen.

Fallen diese Änderungen bei kleinen Werten von  $\alpha R$  kaum ins Gewicht, so ändern sich z. B. die Werte von  $\eta_N$  in einer (3.26) entsprechenden Formel schon erheblich. Auch der topologische Zusammenhang der Eigenwertkurven  $c = c(\alpha, \alpha R)$  sieht uns anders aus als bei Hopf. Erhalten bleibt jedoch das qualitative Bild der Eigenfunktionen, die daraus gezogenen physikalischen Folgerungen und das Hauptergebnis, daß nämlich alle Schwingungen gedämpft verlaufen.

#### 4. Der Grenzfall $\alpha R \rightarrow \infty$ bei endlicher Ordnung $n$ für symmetrische Grundströmungen

Bei einer Grundströmung mit symmetrischem Geschwindigkeitsprofil

$$U(y) = U(-y) \quad (4.1)$$

besitzt die Stabilitätsdifferentialgleichung (1.2) stets ein Fundamentalsystem von vier Lösungen  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4$ , so daß

$$\left. \begin{array}{ll} \tilde{\varphi}_2(y), & \tilde{\varphi}_4(y) \text{ gerade Funktionen von } y \\ \tilde{\varphi}_1(y), & \tilde{\varphi}_3(y) \text{ ungerade Funktionen von } y \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

sind. Soll nun eine Linearkombination dieser Lösungen den Randbedingungen (1.3) in der Reihenfolge  $\varphi(-1) = 0, \varphi'(-1) = 0, \varphi(+1) = 0, \varphi'(1) = 0$  genüge leisten, so muß die folgende unter Beachtung der Symmetrien (4.2) vereinfachte Determinante verschwinden:

$$D = \begin{vmatrix} \tilde{\varphi}_1(-1) & \tilde{\varphi}_3(-1) & \tilde{\varphi}_2(-1) & \tilde{\varphi}_4(-1) \\ \tilde{\varphi}_1'(-1) & \tilde{\varphi}_3'(-1) & \tilde{\varphi}_2'(-1) & \tilde{\varphi}_4'(-1) \\ -\tilde{\varphi}_1(-1) & -\tilde{\varphi}_3(-1) & \tilde{\varphi}_2(-1) & \tilde{\varphi}_4(-1) \\ -\tilde{\varphi}_1'(-1) & -\tilde{\varphi}_3'(-1) & -\tilde{\varphi}_2'(-1) & -\tilde{\varphi}_4'(-1) \end{vmatrix} = 0.$$

Da diese Determinante als Produkt der beiden zweireihigen Determinanten geschrieben werden kann:

$$-\frac{D}{4} = \begin{vmatrix} \tilde{\varphi}_1(-1) & \tilde{\varphi}_3(-1) \\ \tilde{\varphi}_1'(-1) & \tilde{\varphi}_3'(-1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tilde{\varphi}_2(-1) & \tilde{\varphi}_4(-1) \\ \tilde{\varphi}_2'(-1) & \tilde{\varphi}_4'(-1) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3),$$



erhält man durch Nullsetzen jeweils eines der beiden Faktoren je einen Zweig der Eigenwertgleichung. Die Eigenfunktionen können deswegen entweder nur gerade oder nur ungerade sein, wobei die betreffenden Eigenwerte  $c$  im allgemeinen verschieden sind.

Um von diesen Gleichungen aus zu asymptotischen Eigenwertformeln zu gelangen, wird man die vier Fundamentallösungen (4.2)  $\tilde{\varphi}_1 \dots \tilde{\varphi}_4$  so bestimmen, daß sie geeigneten asymptotischen Entwicklungen zugänglich sind. Als dem Problem angepaßt erweisen sich die von W. Tollmien [12] („asymptotische Integration der Stabilitätsdifferentialgleichung“) beschriebenen Fundamentallösungen, deren asymptotische Darstellungen mit Restgliedabschätzungen versehen sind.

Um den Anschluß dieser Fundamentallösungen an die unsrigen herzustellen, ist es unerläßlich, zuvor auf den Begriff der „reibunglosen Approximation“ einzugehen. Die Frage nach Lösungen der vollständigen Stabilitätsdifferentialgleichung (1.2), die für  $\alpha R \rightarrow \infty$  mitsamt ihren Ableitungen nach  $y$  gegen eine Grenzfunktion

$$\lim_{\alpha R \rightarrow \infty} \varphi(y, \alpha R) = \chi(y) \dots \dots \dots (4.4)$$

streben, führt zu der sogen. „reibunglosen Differentialgleichung“

$$(U - c)(\chi' - \alpha^2 \chi) - U'' \chi = 0 \dots \dots \dots (4.5),$$

der solche Grenzfunktionen notwendigerweise genügen müssen. Will man die Lösungen dieser reibungslosen Differentialgleichung zur Approximation der Lösungen der vollständigen Differentialgleichung für  $\alpha R \rightarrow \infty$  verwenden, so darf man den Geltungsbereich der Grenzwertaussagen (4.4) in der komplexen  $y$ -Ebene nicht außer Acht lassen. Nach W. Wasow [13] gilt darüber der folgende Satz:

„Von den vier Fundamentallösungen (4.2) sind je eine gerade und eine ungerade so bestimmbar, daß mit zwei geeigneten reibungslosen Lösungen  $\tilde{\chi}_1(y)$  und  $\tilde{\chi}_2(y)$  die Approximationen

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(y) &= \tilde{\chi}_1(y) + 0\left(\frac{1}{\alpha R}\right), & \chi_1(y) &= \text{ungerade Fkt. von } y, \\ \varphi_2(y) &= \tilde{\chi}_2(y) + 0\left(\frac{1}{\alpha R}\right), & \tilde{\chi}_2(y) &= \text{gerade Fkt. von } y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.6)$$

in jedem festen Innern eines Doppelbereiches (I + II) oder (II + III) oder (III + I) zu Recht bestehen und jeweils im komplementären dritten Bereich III bzw. I bzw. II ungültig werden. Das Gleiche gilt für die Ableitungen nach  $y$ .“ (Vgl. Bild 3.)

Die jeweilige Grenze zwischen den Bereichen I, II und III genügt der Gleichung

$$Re \left[ \sqrt{i} \cdot \int_{y_k}^y \sqrt{U - c} dy \right] = 0,$$

wenn  $y_k$  die durch

$$U(y_k) = c, \quad Re y_k < 0 \dots \dots (4.7)$$

definierte „kritische Stelle“ bezeichnet. Näheres zu den Gebieten I, II u. III bei Wasow [13].

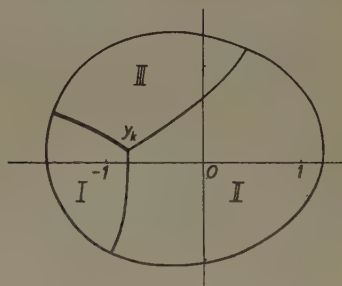


Bild 3. Die Gebiete I, II und III in der komplexen  $y$ -Ebene

Die reibungslose Differentialgleichung (4.5) besitzt an der kritischen Stelle  $U(y_k) = c$  eine singuläre Stelle der Bestimmtheit. Zwei Fundamentallösungen verhalten sich dort wie

$$\chi_1(y) = (y - y_k) \cdot \mathfrak{P}_1(y - y_k), \quad \chi_2(y) = \mathfrak{P}_2(y - y_k) + \frac{U_k''}{U_k'} \mathfrak{P}_1(y - y_k) \cdot (y - y_k) \ln(y - y_k), \quad (4.9),$$

wenn  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_2$  Potenzreihen mit dem Anfang

$$\mathfrak{P}_1(z) = 1 + z \cdot \frac{U_k''}{2 U_k'} + 0(z^2), \quad \mathfrak{P}_2(z) = 1 + 0(z^2) \dots \dots \dots (4.9a)$$

bezeichnen (vgl. W. Tollmien [12], S. 35). Der gemeinsame Konvergenzradius dieser Potenzreihen wird beschränkt entweder durch den Konvergenzradius einer entsprechenden Reihe für  $U - c$  oder durch die nächstbenachbarte Nullstelle von  $U - c$  als einer singulären Stelle der Differentialgleichung.

Für den weiteren Verlauf empfiehlt sich die Einführung einer Folge von Funktionen  $B_n(\eta)$  durch das mit (3.11) vergleichbare Laplace-Integral

$$B_n(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{B}} e^{\eta z + i \frac{z^3}{3}} \cdot z^{n-1} (\ln z + \hat{c}) dz \quad (4.10).$$

Darin bezeichnet  $\hat{c} = 0,5772 \dots$  die Euler'sche Konstante. Der Integrationsweg  $\mathfrak{B}$  verläuft in der in Bild 4 angedeuteten Weise in der komplexen längs  $(0, -i\infty)$  aufgeschnittenen  $z$ -Ebene vom Unendlichen ins Unendliche.

Die Funktionen  $B_n(\eta)$  genügen der Differentialformel

$$\frac{dB_n(\eta)}{d\eta} = B_{n+1}(\eta) \quad (4.11)$$



und der Rekursionsformel

$$i \cdot B_{n+3} + \eta \cdot B_{n+1} + n \cdot B_n = P_n \quad (4.12),$$

in welcher  $P_n(\eta)$  die in (3.19) erklärten Polynome sind.

Bild 4. Integrationsweg  $\mathfrak{B}$  in der komplexen längs  $(0, -i\infty)$  aufgeschnittenen  $z$ -Ebene

Mittels dieser beiden Formeln kann die Gesamtheit der Funktionen  $B_n(\eta)$  und ihrer Ableitungen und Integrale rekursiv aus den drei Grundfunktionen

$$B_0(\eta), B_1(\eta), B_2(\eta) \quad (4.13)$$

aufgebaut werden. Die Grundfunktionen  $B_1$  und  $B_2$  sind mittels der Darstellung

$$B_n(\eta) = 2\pi i \begin{vmatrix} A_0(\eta), & A_0^*(-\eta^*), \\ A_n(\eta), & (-1)^n A_n^*(-\eta^*) \end{vmatrix} \quad (4.13a)$$

(\* = konjugiert-komplexer Wert) auf die Funktionen  $A_n$  zurückführbar (vgl. W. Tollmien [10], S. 27).

Die Bedeutung der Funktionen  $B_n(\eta)$  für unser Stabilitätseigenwertproblem liegt darin, daß die Funktion  $B_1(\eta)$  zufolge (4.11) und (4.12) der Differentialgleichung

$$i \frac{d^4 B_1}{d\eta^4} + \eta \frac{d^2 B_1}{d\eta^2} = 1 \quad (4.14)$$

genügt, die unter der Bezeichnung „Differentialgleichung für die Reibungskorrektur“ von W. Tollmien [10], [12] als wesentlicher Bestandteil in die asymptotische Integration der Stabilitätsdifferentialgleichung eingeführt worden ist.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns den vier von Tollmien im Hinblick auf asymptotische Entwickelbarkeit konstruierten Fundamentallösungen  $\varphi_I, \varphi_{II}, \varphi_{III}, \varphi_{IV}$  der vollständigen Stabilitätsdifferentialgleichung zu. Diese vier Lösungen lassen sich nach W. Tollmien [12] S. 77 unter Verwendung der Substitution

$$y - y_k = \varepsilon \eta \quad \text{mit} \quad \varepsilon = (\alpha R U_k')^{-1/3} \quad \text{und} \quad y_k \quad \text{aus} \quad U(y_k) = c \quad (4.16)$$

so bestimmen, daß sie sowohl in einem festen der (aus Gründen der analytischen Fortsetzung) komplexen  $\eta$ -Ebene als auch in jedem festen Innern des Bereiches II der reibungslosen Approximation [vgl. (4.6a)] die folgenden asymptotischen Darstellungen besitzen:

$$\varphi_I(y) = \chi_1(y) + O(\varepsilon^3) \quad (4.17a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{II}(y) &= \mathfrak{P}_2(\varepsilon \eta) + \frac{U_k''}{U_k'} \cdot \mathfrak{P}_1(\varepsilon \eta) \cdot \varepsilon [B_{-1}(\eta) + \eta + \eta \ln \varepsilon] + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon); \\ \varphi_{II}(y) &= \chi_2(y) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \right\} \quad (4.17b).$$

verschärfend gilt in jedem festen Innern von II

Des weiteren gilt

$$\varphi_{III}(y) = A_{-1}(\eta) + O(\varepsilon), \quad \text{und zwar in } |\eta| \leq \text{const} \quad (4.17c).$$

Schließlich gilt nach W. Wasow [13] quotientasymptotisch in jedem festen Innern von II (vgl. (4.6))

$$\varphi_{III}(y), \varphi_{IV}(y) \approx \text{const} \cdot \left( \frac{\varepsilon}{U - c} \right)^{5/4} \cdot \exp \left[ \sqrt{i \alpha R} \cdot \int_{y_k}^y \sqrt{U - c} dy \right] \quad (4.17d).$$

Entsprechende Formeln gelten für die Ableitungen.



Zur Weiterbehandlung der Eigenwertgleichung (4.3) müssen wir die in dieser verwendeten Fundamentallösungen  $\tilde{\varphi}_1 \cdots \tilde{\varphi}_4$  durch die obigen Fundamentallösungen  $\varphi_I \cdots \varphi_{IV}$  ausdrücken. Das Ergebnis lautet, wenn für letztere gleich die Darstellungen (4.17) verwendet werden, und indem die Restglieder in jedem Kreise  $|\eta| \leq \text{const}$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  zu Recht bestehen:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_{1,2}(y) - \vartheta_{1,2} \varphi_{III}(y) &= 1 + \varepsilon \cdot \frac{U''_k}{U'_k} [\eta (\ln \varepsilon + 1 + S_{1,2}) + B_{-1}(\eta)] + 0(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) \\ \text{mit } \frac{U''_k}{U'_k} S_1 &= -\frac{\chi_2(0)}{\chi_1(0)}, \quad \frac{U''_k}{U'_k} S_2 = -\frac{\chi'_2(0)}{\chi'_1(0)} \end{aligned} \right\} \quad (4.21a)$$

aus den reibungslosen Lösungen  $\chi_1$  und  $\chi_2$  [vgl. (4.9)]. Des weiteren gilt

$$\tilde{\varphi}_{3,4}(y) = \varphi_{III}(y) + 0\left(\varepsilon^{5/4} \cdot e^{-\frac{\text{const}}{\varepsilon} \sqrt{V\varepsilon}}\right) = A_{-1}(\eta) + 0(\varepsilon) \quad \dots \dots \dots (4.21b).$$

Entsprechende Formeln gelten für die Ableitungen.

Schreiben wir jetzt die beiden in (4.3) erhaltenen Eigenwertgleichungen als Produkt dreier Faktoren, z. B.

$$0 = D = [\tilde{\varphi}_3(-1)] [\tilde{\varphi}_1(-1) - \vartheta \cdot \tilde{\varphi}_3(-1)] \left[ \frac{\tilde{\varphi}'_3(-1)}{\tilde{\varphi}_3(-1)} - \frac{\tilde{\varphi}'_1(-1) - \vartheta \tilde{\varphi}'_3(-1)}{\tilde{\varphi}_1(-1) - \vartheta \tilde{\varphi}_3(-1)} \right]$$

( $\vartheta$  = beliebige Konstante), so liefern die Nullstellen der beiden ersten Faktoren keinen Beitrag zum Eigenwertgebilde, da sie durch entsprechende Pole des dritten Faktors kompensiert werden, es sei denn, daß gleichzeitig die Ableitung  $\tilde{\varphi}'_3(-1)$  verschwände. Es genügt deswegen, nur die Nullstellen des 3. Faktors aufzusuchen. Nach Einsetzen der Approximationen (4.21) erhält man so

$$\frac{1}{\varphi_{III}} \frac{d\varphi_{III}}{d\eta} = \frac{\varepsilon \cdot \frac{U''_k}{U'_k} [\ln \varepsilon + 1 + S_{1,2} + B_0(\eta)]}{1 + \varepsilon \cdot \frac{U''_k}{U'_k} [\eta (\ln \varepsilon + 1 + S_{1,2}) + B_{-1}(\eta)]} + 0(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) \quad (\eta = \eta_{-1})$$

oder

$$\boxed{\frac{A_0(\eta)}{A_{-1}(\eta)} + \varepsilon \psi(\eta) = \frac{\varepsilon \cdot \frac{U''_k}{U'_k} [\ln \varepsilon + 1 + S_{1,2} + B_0(\eta)]}{1 + \varepsilon \frac{U''_k}{U'_k} [\eta (\ln \varepsilon + 1 + S_{1,2}) + B_{-1}(\eta)]} + 0(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)} \quad (4.22)$$

mit  $\eta = \eta_{-1} = (-1 - y_k)/\varepsilon$  und  $S_1, S_2$  gemäß (4.21a) aus den reibungslosen Lösungen. Die aus einer nächsthöheren Näherung in (4.21b) entspringende Funktion  $\psi(\eta)$  lautet

$$\psi(\eta) = \frac{U''_k}{U'_k} \frac{d}{d\eta} \left\{ \frac{A_{-2}(\eta) + \frac{i}{2} A_1(\eta) - \frac{1}{10} A_4(\eta)}{A_{-1}(\eta)} \right\} \quad \dots \dots \dots (4.22a)$$

und kann mittels der Formeln (3.12), (3.13) auf die drei vertafelten Grundfunktionen  $A_0, A_1, A_2$  zurückgeführt werden.

Wie verhalten sich nun die Eigenwerte  $c$ , wenn wir in der Eigenwertgleichung (4.22)  $\alpha R \rightarrow \infty$  d. h.  $\varepsilon \rightarrow 0$  streben lassen? Offenbar strebt  $\eta_{-1}$  dann gegen die Nullstellen  $\eta_N$  der Funktion  $A_0(\eta)$ . Durch Taylorentwicklung um diese Nullstellen folgt genauer

$$\eta_{-1} = \eta_N + \frac{U''_k}{U'_k} \cdot i \frac{A_2(\eta_N)}{A_1(\eta_N)} \cdot \varepsilon \ln \varepsilon + 0(\varepsilon).$$

Die Eigenwerte  $c$  verhalten sich dann asymptotisch wie

$$\boxed{\begin{aligned} c - U(-1) &= -\frac{U'_k}{U'_k} \cdot \varepsilon \eta_N - \frac{U''_k}{U'_k} \cdot i \frac{A_2(\eta_N)}{A_1(\eta_N)} \varepsilon^2 \ln \varepsilon + 0(\varepsilon^2) \\ \text{mit } \eta_N \text{ aus } A_0(\eta_N) &= 0 \end{aligned}} \quad \dots \dots \dots (4.23).$$

In Ergänzung zu (3.21) seien hier einige Nullstellen  $\eta_N$  und Werte  $i A_2/A_1$  angegeben:

$\eta_N$	$i A_2 \eta_N / A_1(\eta_N)$
-4,122 + i · 1,065	-1,686 - i · 1,222
-2,983 + i · 3,037	+1,902 + i · 0,851
-6,8 + i · 2,5	-2,2 - i · 1,5
-5,5 + i · 4,5	+2,4 + i · 1,14

Für  $|\eta_N| \geq 1$  gilt

$$i \frac{A_2(\eta_N)}{A_1(\eta_N)} \approx \sqrt{\frac{\eta_N}{i}} \quad (4.24).$$

An der asymptotischen Eigenwertformel (4.23) ist bemerkenswert, daß sie nach Einsetzen des Geschwindigkeitsprofils  $U = y$  der Couetteströmung übergeht in die entsprechende Formel (3.26), obgleich beide Formeln unter völlig verschiedenen Voraussetzungen hergeleitet wurden.

Die asymptotische Eigenwertformel (4.23) ist bereits so stark reduziert, daß sie eine Unterscheidung der Eigenwerte  $c$ , die zu geraden oder ungeraden Eigenfunktionen gehören, nicht mehr gestattet. Hierzu muß auf die genauere Formel (4.22) zurückgegangen werden, in der die Eigenschaften „gerade“ oder „ungerade“ der Eigenfunktionen mittels der „reibungslös“ zu bestimmen den Konstanten  $S_1$  und  $S_2$  berücksichtigt werden.

Auch zur numerischen Berechnung der Eigenwerte  $c$  in den behandelten Beispielen haben wir die Eigenwertgleichung in der Form (4.22) herangezogen. Als Beispiele wählen wir die ebene Poiseuilleströmung und eine Strömung mit Wendepunktprofil. Wir haben den Verlauf der

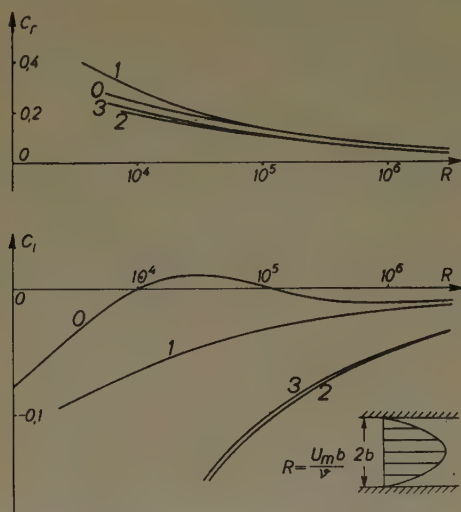


Bild 5. Ebene Poiseuilleströmung. Die vier niedrigsten Eigenwerte  $c$  in Abhängigkeit von  $R$  bei  $\alpha = 0,87$

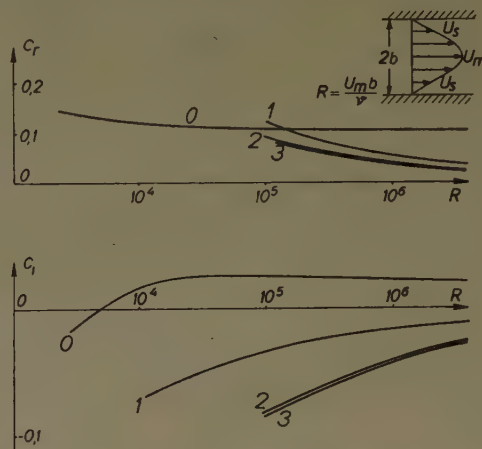


Bild 6. Wendepunktprofil

$$U = (\sqrt{2} - 1) + (2 - \sqrt{2}) \cos y \pi/4.$$

Die vier niedrigsten Eigenwerte  $c$  in Abhängigkeit von  $R$  bei  $\alpha = 0,5$ .

vier niedrigsten Eigenwerte in Abhängigkeit von  $R$  für einen festen Wert von  $\alpha$  in den Bildern 5 und 6 dargestellt. Die numerische Rechnung selbst ist nach Zurückführung der in der Eigenwertgleichung enthaltenen nichtalgebraischen Elemente auf die drei vertafelten Grundfunktionen  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  und auf die reibungslosen Lösungen eine Aufgabe der numerischen Praxis, auf deren Einzelheiten hier nicht eingegangen werden kann. Erwähnt sei nur die folgende Näherungsdarstellung der reibungslosen Konstanten  $S_2$

$$\frac{U_k''}{U_k'} \cdot S_2 = A \cdot \alpha^{-2} + 0(1) \quad \text{für } \alpha \ll 1 \quad \text{mit} \quad A = \frac{(U_k')^2}{\int_{-1}^0 (U - c)^2 dy} \dots (4.25)$$

(vgl. W. T o l l m i e n [11], S. 100), welche mit Vorteil bei kleinen Werten von  $\alpha$  anzuwenden ist.

Die Indizierung der aus (4.22) gewonnenen Eigenwerte  $c$  im Sinne eines stetigen Anschlusses an den Grenzfall  $\alpha R \rightarrow 0$  bleibt hier ein offenes Problem. Auch im Geltungsbereich von (4.22) allein läßt sich eine durchgängige Indizierung nach der Vorschrift  $Im(c_{n+1}) \leq Im(c_n)$ , d. h. nach wachsender Dämpfung, grundsätzlich nicht durchführen. Zwar lassen sich die Nullstellen in (4.23) nach wachsendem Imaginärteil ordnen, aber die Kurven  $Im(c_n)$  können einander bei Änderung von  $\varepsilon$  durchdringen.

## 5. Die reibungslosen Eigenwerte innerhalb des Grenzfalles $\alpha R \rightarrow \infty$ .

### Die Ermittlung der angefachten Eigenwerte

Die Approximation (4.6) mittels der reibungslosen Lösungen sei entweder auf den Doppelbereich I + II (vgl. Bild 3) oder auf den Doppelbereich II + III zugeschnitten, wodurch in den reibungslosen Lösungen jeweils das logarithmische Glied eindeutig festgelegt wird. Unter Verwendung der Approximationen (4.17) erhält man dann über die Eigenwertgleichungen (4.3) Eigenwerte  $c$ , die für  $\alpha R \rightarrow \infty$  gegen die sog. „reibungslösigen Eigenwerte“  $c^{(0)}(\alpha)$  streben, welche durch die Randbedingung  $\tilde{\chi}_1(-1) = 0$  bzw.  $\tilde{\chi}_2(-1) = 0$  der ungeraden bzw. geraden reibungslosen Lösungen  $\tilde{\chi}_1$ ,  $\tilde{\chi}_2$  definiert sind. Über diese durch den Geltungsbereich der Grenzwertaussagen (4.6) eingeschränkten reibungslosen Eigenwerte lassen sich nach W. T o l l m i e n [11] z. T.



auf Grund der „Rayleigh-Tollmischen Sätze“ die folgenden allgemeinen Aussagen machen:

„Bei Wendepunktfreien Geschwindigkeitsprofilen sind keine angefachten reibungslosen Eigenwerte möglich. Die zu den gedämpften reibungslosen Eigenwerten zugeordnete Approximation (4.6) muß stets im Innern des Doppelbereiches I + II stattfinden.“

„Bei Wendepunktprofilen gibt es stets angefachte reibungslose Eigenwerte zu gerader Eigenfunktion.“

Über diese allgemeinen Aussagen hinaus wurden in keinem der Beispiele reibungslose Eigenwerte zu ungerader Eigenfunktion gefunden, oder solche Eigenwerte, bei denen die zugeordnete Approximation (4.6) im Innern des Doppelbereiches II + III stattgefunden hätte. Als Beispiele wählten wir die ebene Poiseuilleströmung als Vertreter eines Wendepunktfreien Profils sowie das Wendepunktprofil  $U = (\sqrt{2} - 1) + (2 - \sqrt{2}) \cdot \cos \frac{3\pi}{4} y$ . Die nur zu gerader Eigenfunktion gefundenen reibungslosen Eigenwerte  $c$  sind in den Bildern 7 und 8 dargestellt. Der

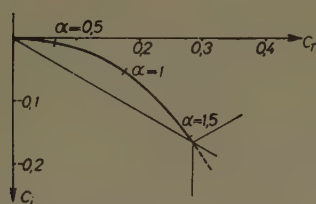


Bild 7. Ebene Poiseuilleströmung. Der reibungslose Eigenwert  $c$  zu gerader Eigenfunktion in Abhängigkeit von  $\alpha$

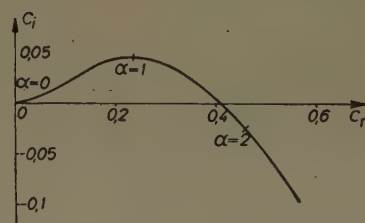


Bild 8. Wendepunktprofil  
 $U = (\sqrt{2} - 1) + (2 - \sqrt{2}) \cos y \frac{3\pi}{4}$ .  
Der reibungslose Eigenwert  $c$  zu gerader Eigenfunktion in Abhängigkeit von  $\alpha$

Existenzbereich dieser Eigenwerte ist jeweils durch ein Intervall  $0 \leq \alpha \leq \text{const}$  gegeben. Für den reibungslosen Eigenwert  $c$  hat Tollmien [11], S. 100 die folgenden Näherungsformeln aufgestellt:

$$\alpha = \alpha(c_r) = \frac{c_r U'(-1)}{\int_0^1 (U - c_r)^2 dy}, \quad c_i = c_i(c_r) = c_r^2 \cdot \frac{\pi U_K''}{(U_K')^2} \quad \text{mit} \quad U(y_K) = c_r \quad (5.1).$$

Wir fragen nun nach dem Zusammenhang, in dem die reibungslosen Eigenwerte mit den bisher diskutierten stehen. Die geschlossene Lösung bei der Couetteströmung vermag hierzu keine Antwort zu liefern, weil die betreffenden reibungslosen Eigenwerte dort garnicht existieren. Es ist aber möglich, die reibungslosen Eigenwerte in die Gl. (4.22) einzufügen, und sie so als Grenzfall innerhalb der Eigenwerte (4.23) zu verstehen.

Es werde also an der Eigenwertgleichung (4.22) der Grenzübergang  $\alpha R \rightarrow \infty$ , d. h.  $\varepsilon \rightarrow 0$  bei festgehaltenem  $(-1 - y_k) = \varepsilon \eta_{-1}$  vollzogen, wobei die Berechtigung dieses Vorganges aus der (4.22) vorangehenden Gleichung zu nehmen ist. Mittels der asymptotischen Formeln (3.16) folgt dann für  $\alpha R \rightarrow \infty$

$$1 + (-1 - y_k) \frac{U_k''}{U_k'} \{ \ln(-1 - y_k) + S_{1,2} \} = 0.$$

Das sind aber genau die ersten Taylorglieder der reibungslosen Eigenwertgleichung  $\chi_1(-1) = 0$  bzw.  $\chi_2(-1) = 0$ , die man gemäß der Bedeutung (4.21a) von  $S_1, S_2$  bei Taylorentwicklung im Sinne der Reihen (4.9) erhalten würde.

Auf Grund dieser Erkenntnis kann die Ermittlung der angefachten Eigenwerte ( $Im c > 0$ ) vereinfacht werden. Da angefachte Eigenwerte nach den Ergebnissen des 2. Abschnittes nur innerhalb der ersten endlich vielen Eigenwerte und für genügend große Werte von  $R$  auftreten können, genügt es, die Gl. (4.22) auf angefachte Eigenwerte hin zu untersuchen. Und hierbei gilt dann die Alternative: Angefachte Eigenwerte sind entweder durch die reibungslose Randwertaufgabe in Verbindung mit genügend großen Werten von  $R$  (approximativ) bestimmbar, oder sie liegen in einer Umgebung von  $c = U(-1)$  und sind mittels einer der Gln. (4.22) oder (4.23) als zu *endlichen* Werten von  $\eta_{-1}$  gehörig bestimmbar.

Wie hieraus für genügend große Werte von  $R$  folgt, aber in den Beispielen auch für die kleineren Werte von  $R$  bestätigt wurde, ist bei Wendepunktprofilen die stärkste Anfachung stets mit dem reibungslosen Eigenwert bzw. dessen Fortsetzung nach kleineren  $R$ -Werten verbunden.

Hieraus folgt die wohlbekannte Tatsache, daß bei Wendepunktprofilen das Stabilitätsverhalten bereits aus der reibungslosen Differentialgleichung allein zu erschließen ist. Man vergleiche hierzu die Berechnung der reibungslosen Eigenwerte von G. R o s e n b r o o k [9] für ein Wendepunktprofil, welches dieser in einem divergenten Kanal gemessen hatte.

### 6. Gestalt der Eigenfunktion. Die innere Reibungsschicht. Der zeitliche Verlauf einer Störung

Um den zeitlichen Verlauf einer Störung zu beurteilen, wird man diese in Partialwellen der Art (1.1) zerlegen. Es ist dann erforderlich den Verlauf der Amplitude  $\varphi(y)$  über die Kanalbreite hinweg zu kennen. Wir betrachten hier nur den Fall sehr großer Werte von  $\alpha R$ .

Bei der C o u e t t e strömung folgt über (3.4) in der Bezeichnungsweise (3.6), (3.9) und (3.15) für  $\varepsilon \ll 1$ , d. h.  $\alpha R \gg 1$  als Näherungsausdruck für die Eigenfunktion

$$\varphi(y) = F(\eta) - F\left(\eta e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \dots \dots \dots (6.1)$$

mit

$$F(\eta) = \frac{A_{-1}(\eta) - A_{-1}(\eta_{-1})}{A_{-1}(\eta_1) - A_{-1}(\eta_{-1})} \dots \dots \dots (6.2).$$

Die Randbedingungen  $\varphi(\pm 1) = 0$  sind identisch erfüllt; die restlichen Randbedingungen sind mit der Eigenwertgleichung (3.24) identisch. Wie bereits aus der Differentialgleichung folgt, ist  $\varphi^*(-y)$  eine Eigenfunktion zum Eigenwert  $-c^*$ . Wir haben hiernach für  $\alpha = 1$  und  $R = 10^3$  die Eigenfunktion zum Eigenwert  $c = -0,7 - i 0,3$  berechnet und in Bild 9 dargestellt.

In diesem Bilde fällt auf, daß sich die wesentlichen Änderungen der Eigenfunktion in einer Schicht  $-1 \leq y \leq y_0$  abspielen, die etwa durch den Winkelraum  $\arg \eta \leq \pi/6$  des starken Anwachsens von  $A_{-1}(\eta)$  zu definieren wäre. In der Veränderlichen  $y$  lautet diese „innere Reibungsschicht“ zufolge (3.6), (3.26) näherungsweise

$$-1 \leq y \leq -1 + \varepsilon (-\operatorname{Re} \eta_N + \sqrt{3} \operatorname{Im} \eta_N), \quad \varepsilon \ll 1 \dots \dots \dots (6.3).$$

Aus dieser Darstellung geht hervor, daß die Breite der Schicht mit wachsender Ordnung  $n$  der Eigenfunktionen zunimmt, wobei gleichzeitig die Dämpfungsgröße anwächst. Die Geschwindigkeit der zugeordneten Störwelle ist etwa gleich der Geschwindigkeit der Grundströmung in der Mitte der Schicht. Die Dicke der Schicht geht ferner mit  $\varepsilon$  gegen Null. Die physikalische Interpretation dieses Sachverhaltes besagt nach H o p f [5], S. 57, „daß

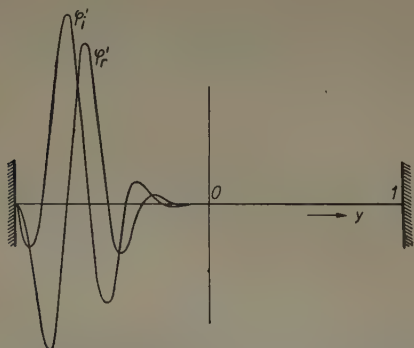


Bild 9. Geradlinige Couetteströmung. Eigenfunktion  $\varphi'(y)$  bei  $\alpha = 1$  und  $R = 10^3$  zum Eigenwert  $c = -0,70 - i \cdot 0,30$

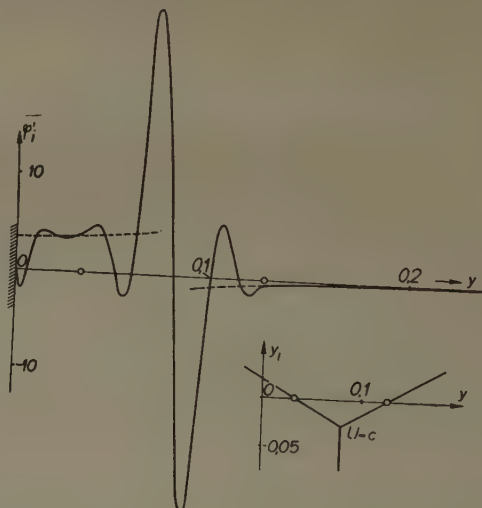


Bild 10. Ebene Poiseuilleströmung. Eigenfunktion  $\varphi'(y)$  bei  $\alpha = 1$  und  $R = 7,7 \cdot 10^3$  zum Eigenwert  $c = 0,178 - i \cdot 0,049$

jede beliebige Störung für große Werte von  $R$  so abklingt, daß schließlich nur von den Wänden, und zwar ohne gegenseitige Beeinflussung Störungen auszugehen scheinen, ein Verhalten, welches an reibungslose Flüssigkeiten gemahnt“.

Bei allgemeineren Grundströmungen hat T o l l m i e n [12] einen Näherungsausdruck für die Eigenfunktion aufgestellt, an dem sich im Dämpfungsfalle wieder eine „innere Reibungsschicht“ erkennen läßt, die durch den Winkelraum  $\pi/6 \leq \arg \eta \leq 5\pi/6$  der starken Wachstumsänderungen von  $B_{-1}(\eta)$  bzw.  $A_{-1}(\eta)$  zu definieren wäre. In der Veränderlichen  $y$  lautet diese Schicht zufolge (4.16)

$$-1 + \frac{c_r + \sqrt{3} c_i}{U'(-1)} \leq y \leq -1 + \frac{c_r - \sqrt{3} c_i}{U'(-1)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \dots \dots \dots (6.9),$$



woraus man bei den höheren Eigenwerten zufolge (4.23) wieder die Formel (6.3) für die Couetteströmung erhält. Existieren jedoch reibungslose gedämpfte Eigenwerte  $c$  im Sinne des 5. Abschnittes, so behält die innere Reibungsschicht (6.9) auch beim Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  eine endliche Dicke und einen endlichen Abstand von der Wand. Wir haben für diesen letzteren Fall die gerade Eigenfunktion im Beispiel der Poiseuilleströmung zu  $\alpha = 1$  und  $R = 7,7 \cdot 10^5$  berechnet und in Bild 10 dargestellt. Der Eigenwert  $c = 0,178 - i \cdot 0,049$  weicht kaum von dem zu  $\alpha = 1$  gehörigen reibungslosen Eigenwert ab.

In Gegenüberstellung der inneren Reibungsschicht zur Grenzschicht kann man sagen, daß die Grenzschicht denjenigen Strömungsbereich darstellt, in dem das Verhalten der laminaren Grundströmung maßgeblich durch die innere Reibung beeinflusst wird, während die innere Reibungsschicht den Bereich angibt, in dem die Störung maßgeblich unter dem Einfluß der Reibung steht, denn außerhalb dieser Schicht läßt sich die Störung ja reibungslos bestimmen.

### Literaturverzeichnis

- [1] H. H. Aiken: Tables of the modified Hankel functions of order one-third and of their derivatives. Harvard University Press, Cambridge (Mass.) 1945.
  - [2] G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937.
  - [3] O. Haupt: Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems. Sitzber. d. Münchener Akad., Mathem. phys. Kl. 1912.
  - [4] H. Holstein: Über die äußere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen. Z. angew. Math. Mech. 1950, S. 25—49.
  - [5] L. Hopf: Der Verlauf kleiner Schwingungen auf einer Strömung reibender Flüssigkeit. Ann. d. Phys. 1914, S. 1—60.
  - [6] C. S. Morawetz: The Eigenvalues of some Stability Problems involving Viscosity. Journ. of Ration. Mechan. and Analysis. Vol. 1, 1952, p. 579—603.
  - [7] F. Noether: Zur asymptotischen Behandlung der stationären Lösungen im Turbulenzproblem. Z. angew. Math. Mech. 1926, S. 232—243.
  - [8] Lord Rayleigh: Scient. papers III, p. 575—584.
  - [9] G. Rosenbrock: Instabilität der Gleitschicht im schwach divergenten Kanal. Z. angew. Math. Mech. 1937, S. 8—24.
  - [10] W. Tollmien: Über die Entstehung der Turbulenz. Nachr. d. Ges. d. Wissensch., Göttingen 1929.
  - [11] W. Tollmien: Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. d. Ges. d. Wissensch. Göttingen 1935.
  - [12] W. Tollmien: Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Z. angew. Math. Mech. 1947, S. 37—50 u. 70—83.
  - [13] W. Wasow: The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics. Ann. of Math. 49 (1948), p. 852—871.
- Eingegangen am 7. August 1953.

## BUCHBESPRECHUNGEN

**M. N. Butschin, Reibungsuntersuchungen an geschmierten Oberflächen bei tiefen Temperaturen** (mit einem Vorwort von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. E. Heidebrock, Dresden). VIII + 64 S. m. 46 Abb. u. 3 Zahlentafeln. Berlin 1953. Akademie-Verlag. Preis geb. 7,50 DM.

Das Verhalten von Schmiermitteln bei tiefen Temperaturen bestimmt nicht nur die Anlaßmomente beim Starten von Verbrennungsmotoren, sondern auch die Funktion von Meßinstrumenten im Flug- und Verkehrswesen in der Kälte. Planmäßige Untersuchungen nach dieser Richtung lagen noch nicht vor; jetzt wird erstmalig von M. N. Butschin dieser Aufgabe eine eingehende Experimentalarbeit gewidmet.

Bei einleitenden Versuchen an ungeschmierten Flächen zeigte sich eine Abhängigkeit der Reibung vom Vorhandensein adsorbierter Schichten. Bei geschmierten Flächen ergaben sich für jedes Schmiermittel bestimmte kritische Temperaturen, unterhalb deren die Reibung sehr große Werte annahm, größer als bei den Versuchen ohne Schmiermittel. Diese kritische Temperatur gilt daher als untere Grenze für die Brauchbarkeit, sie steht nicht in enger Verbindung mit dem Stockpunkt, den man bisher als Kennzeichen für die Verwendung bei tiefen Temperaturen ansah.

Für die Versuche wurde eine Apparatur mit schiefer Ebene verwendet, also der Reibungswinkel gemessen, bei dem die Bewegung eintritt. Leider fehlen alle Angaben über die Abmessungen der Versuchsappa-

ratur. Die Ergebnisse sind dennoch äußerst aufschlußreich. Ferner wurden kleine Wälzlager untersucht, wie sie in Meßinstrumenten Verwendung finden. Zwischen den Gleitversuchen und denen mit Kugellagern ergeben sich in bezug auf die Wirkung der Schmiermittel enge Zusammenhänge.

Die sorgfältig durchgeführten Versuche verdienen besondere Beachtung und geben hoffentlich Anreiz zur Erforschung vieler noch offener Fragen über das Reibungsverhalten von Maschinen und Apparaturen bei großer Kälte.

Göttingen.

G. Vogelpohl.

**Dr.-Ing. A. Nasvytis, Die Gesetzmäßigkeiten kombinatorischer Technik.** (Wissenschaftliche Normung. Schriftreihe, herausgegeben mit dem Seminar für Technische Normung an der Technischen Hochschule Hannover. Heft 3) VIII + 103 S. m. 29 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953. Springer-Verlag. Preis geh. 9,— DM.

Der Verfasser hat es sich zum Ziel gesetzt, die mathematischen Grundsätze herauszuarbeiten, nach denen die verschiedenen Einzelfragen der Normung möglichst einheitlich zu behandeln sind. Dabei soll der Begriff „Normung“ im weitesten Sinne verstanden werden; er soll z. B. auch die Gesetzmäßigkeiten einer Sprache, den Aufbau einer Schrift und die Ordnung des Zahlensystemes mit umfassen. Es geht immer darum, aus gewissen Elementen — z. B. Grundmaßen,

Getriebeteilen, Elementarvorgängen, Schriftzeichen und Ziffern — größere oder kompliziertere Gebilde zusammzusetzen. Soll das in möglichst einfacher und sparsamer Weise geschehen, so wird man einerseits bestrebt sein, mit möglichst wenigen Typen von Elementen auszukommen, andererseits sich aber bemühen, die Zahl der zum Aufbau der gewünschten Gebilde benötigten Elemente nicht zu groß werden zu lassen. Im allgemeinen widersprechen diese beiden Forderungen einander, so daß man nach einer optimalen Kompromißlösung zu suchen hat.

Da hierbei in der Hauptsache kombinatorische Fragen auftreten, werden in Abschn. 21 zunächst die Grundtatsachen der Kombinatorik zusammengestellt.

Ausführlich werden dann in 22 bis 24 Kombinationen betrachtet, die in der zeitlichen Aufeinanderfolge einzelner Elementarvorgänge bestehen — der Verfasser nennt sie „kinetische Kombinationen“. Zwar wird durch die Betrachtung solcher zeitlicher Folgen kein grundsätzlich neues Element in die Kombinatorik eingeführt, es treten aber einige bisher weniger beachtete kombinatorische Aufgaben mehr in den Vordergrund.

Auf andersartige kombinatorische Fragen führt in 25 die Untersuchung räumlicher Kombinationen.

Die allgemeinen Grundsätze für die Behandlung von Normungsaufgaben werden nun in Abschn. 3 zuerst auf das Zahlensystem angewendet. Insbesondere werden Systeme mit verschiedenen Grundzahlen verglichen, und dabei zeigt sich, daß das Zehnersystem einen recht günstigen Kompromiß zwischen den beiden Forderungen liefert, einerseits die Ziffern-Anzahl und andererseits die Stellenzahl klein zu halten.

Hieran schließt in Abschn. 4 unmittelbar eine allgemeine Untersuchung „additiver“ und „multiplikativer“ Größensysteme an, die für die Schaffung genormter und möglichst vielseitig verwendbarer Elemente grundlegend sind.

Die Abschnitte 5 bis 7 behandeln spezielle Anwendungsgebiete: Schriftsysteme, Baukastensysteme und Kombinationsmaschinen.

Bemerkenswert ist der in dieser Schrift zutage tretende Umstand, daß technische Fragestellungen in Teilgebiete der Mathematik hineinführen können, die den Anwendungen zunächst scheinbar fernliegen.

Hannover

H. Epheser.

Paul F. Byrd and Morris D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*. (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. LXVII.) XIII + 355 S. mit 22 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1954. Preis geh. 36,— DM, geb. 39,60 DM.

Allen theoretisch arbeitenden Ingenieuren, nicht nur denen, die wie die Verf. sich mit Aerodynamik beschäftigen, begegnen heute in zunehmendem Maße nicht-elementare Integrale und höhere transzendente Funktionen, insbesondere elliptische Integrale und Funktionen. Ihnen will das vorliegende Buch helfen, ohne daß seine Benutzung eine eingehende Beschäftigung mit diesen Integralen und Funktionen voraussetzt. Es gibt eine Zusammenstellung von etwa 3000 Integralen und Formeln, die nach praktischen Gesichtspunkten ausgewählt sind. Dabei sind in der Hauptsache die Formeln und Bezeichnungen nach Jacobi benutzt, während die von Weierstraß in einem Anhang verwiesen sind. Nach einer kurzen Einführung, in der an fünf Beispielen der Gebrauch der Tafeln gezeigt wird, werden zunächst die Definitionen und Fundamentalrelationen zusammengestellt. Den größten Teil des Buches füllen dann Tafeln für die Reduktion algebraischer, trigonometrischer und hyperbolischer Integranden auf Jacobische elliptische Funktionen. Es folgen u. a. Abschnitte mit Tafeln von Integralen Jacobischer Funktionen, mit elliptischen Integralen dritter Art,

mit elliptischen Integralen, die sich bei Laplace-Transformationen ergeben, mit hyperelliptischen Integralen, mit Integralen und Ableitungen elliptischer Integrale nach Modul und nach Argument, und schließlich werden die Reihenentwicklungen gegeben. Erst in einem Anhang werden dann die Formeln für die Weierstraßschen elliptischen Integrale und Funktionen, insbesondere die Thetafunktionen, gebracht. Den Schluß bilden Zahlentafeln der wichtigsten hier in Betracht kommenden Integrale und Funktionen. — Das Buch wird dem Physiker und dem forschenden Ingenieur ausgezeichnete Dienste leisten.

Dresden.

Willers.

J. C. Belgrano unter Mitarbeit von A. Lopez Nieto und J. M. Urcelay, *Tratado de nomografia* mit einem Vorwort von J. Rey Pastor. XII + 387 S. mit etwa 250 Abb. Madrid 1953. Instituto tecnico de la construction y del cemento. Preis brosch. 125,— ptas.

Nach Schilderung der grundlegenden Gedanken, die zur nomographischen Darstellung führen, werden Kurventafeln mit festen und beweglichen Ebenen erörtert, anschließend die Fluchtlinientafeln mit einer Geraden als Ablesemittel und in Erweiterung mit einem Winkel, einem Parallel-Lineal oder einem Storchschnabel als Ablesemittel. Die breite und in viele Einzelheiten gehende Darstellung enthält zahlreiche, den verschiedensten Gebieten entnommene Beispiele und schließt mit einem Anhang, der neben einem Hinweis auf die vielfältigen Möglichkeiten der Nomographie einen englischen und einen französischen Auszug enthält sowie ein Verzeichnis der wichtigsten nomographischen Werke (einzelne Literaturhinweise finden sich im Hauptteil an verschiedenen Stellen) und eine Zusammenstellung der Anwendungsbeispiele geordnet nach Sachgebieten. Das vorliegende Werk wird zweifellos der Anwendung der Nomographie sehr förderlich sein.

Aachen.

W. Meyer zur Capellen.

Dr. W. Reichardt, (Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden). *Grundlagen der Elektrotechnik*. VIII + 464 S. m. 311 Abb. u. mehreren Tabellen. Leipzig 1952. Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K. G. Preis geb. 32,— DM.

Das folgende Lehrbuch, dessen Kapitel-Überschriften lauten: Physikalische Grundbegriffe, das Schallempfinden des Menschen, die Schallwandler, Mikrophon-Einsatz, Beschallungstechnik, Elektro-Schall-Übertragung, Schall-Aufzeichnung stellt eine umfassende Einführung in die technische Akustik überhaupt dar. Wer sich darüber hinaus für ein Spezialgebiet besonders interessiert, findet alle erforderlichen Hinweise in dem 14 Seiten umfassenden Literaturverzeichnis.

Das spezifisch „Elektrische“ an diesem Werk liegt eigentlich nur darin, daß mehr Kenntnisse der Elektrotechnik als der Mechanik vorausgesetzt werden und daher dem Leser das mechanische Verhalten anhand von Analogien zur Elektrotechnik nahegebracht wird. Dabei kann bekanntlich mit gleichem Recht der Schalldruck mit der Spannung wie mit dem Strom verglichen werden. Der Verfasser gibt der zweiten Art den Vorzug, weil sie leichter gestattet, mechanische Systeme in Schaltungen zu übersetzen. Er wehrt sich daher (mit Recht) dagegen, den Quotienten aus Druck und Schnelle als „Widerstand“ zu bezeichnen. Er schlägt statt dessen den Ausdruck „Standwert“ vor und für den reziproken „Leitwert“ den Ausdruck „Mitgang“. (Doch klingt auch hierbei eine größere Zusammengehörigkeit der zuletzt genannten Ausdrücke an, die eben doch tiefere Gründe hat).



Das sorgfältig ausgearbeitete und lebendig geschriebene Werk dürfte auch die Leser der ZaMM interessieren, und zwar nicht nur wegen seines Gegenstandes, der in die Meßtechnik der Mechanik greift, sondern noch mehr wegen seiner grundsätzlichen Auseinandersetzungen über die zweckmäßigste Darstellung von Schwingungs- und Wellenvorgängen. Wie sehr es dem Verfasser dabei um Einheitlichkeit und Konsequenz geht, zeigen die Zusammenstellungen über die verwandten mathematischen Schreibweisen, die verwandten Buchstaben und das verwandte Maß-System, die noch vor der Einleitung stehen. Die Elektro-Akustik hat es hierin besonders schwer, denn in sie gehen mechanische und elektrische Größen ein sowie physikalische Vektoren, die gleichzeitig Zeiger der komplexen Ebene bedeuten. Als umfassendes Maß-System wird daher das Volt-Ampère-Meter-Sekunde-System nach Giorgi gewählt, wobei als zusammengesetzte Einheit nur noch bei mechanischen Problemen das Newton für die Kraft zugelassen wird. Der Versuch des Verfassers, jede Verwechslung in der Schreibweise auszuschließen, führt freilich zu einer Zuhilfenahme von Neu-Einführungen, die möglicherweise stets die Eigenheit dieses Buches bleiben werden. (Sehr anschaulich erscheint dem Referenten dabei die Kennzeichnung des reellen Teiles einer komplexen Größe durch einen horizontalen und des imaginären Teiles durch einen vertikalen Strich.)

Der Anklang, den das Buch gefunden hat, zeigt sich darin, daß in Kürze die zweite Auflage erscheinen wird. Bei dieser Überarbeitung hat der Verfasser die Mühe nicht gescheut, die Schreibweise entweder den inzwischen erfolgten Beschlüssen des AEF anzupassen oder dort, wo solche noch ausstehen, auch seine bisherige Schreibweise zu verlassen, und durch eine ihm geeigneterer scheinende zu ersetzen, womöglich zu vereinfachen.

Wir wünschen dem Werk noch viele Auflagen mit asymptotischer Annäherung an das von ihm erstmalig angestrebte Ziel einer allen Bedürfnissen der Elektro-Akustik gerecht werdenden Schreibweise, die dann allgemein anerkannt und benutzt werden möge.

München.

L. Cremer.

Professor Dr. Alfred Lottermoser, (weil. Direktor des Kolloidchemischen Instituts an der Technischen Hochschule Dresden). Kurze Einführung in die Kolloidchemie unter besonderer Berücksichtigung der anorganischen Kolloide. Dritte, ergänzte Auflage von Dr.-Ing. Carl Kalauch (Forschungsinstitut für chemische Technologie Meinsberg bei Waldheim). VIII + 260 S. m. 111 Abb. Dresden und Leipzig 1954. Verlag Theodor Steinkopff. Preis geb. 10,— DM.

Die bewährte Einführung von A. Lottermoser in das Studium der Kolloidchemie ist in der Neubearbeitung von C. Kalauch durch eine Reihe von Ergänzungen bereichert worden. Die Darstellung des gesamten Stoffes, die sehr elementar und anspruchslos ist, wurde unverändert beibehalten. Neben der Ostwald'schen Einteilung der Kolloide werden neuere Einteilungsprinzipien, z. B. von Staudinger und Kruyt, erwähnt. Bei der Behandlung der Micellbildung wird die Wasserstoffbrückenbindung als häufig wesentlicher Faktor eingeführt. Die modernen Apparaturen für die Elektrophorese werden abgebildet, insbesondere auch die Grassmann'schen einfachen Vorrichtungen zur Papierelektrophorese. Ein kurzer Abschnitt über die Chromatographie ist auch eingefügt worden, allerdings ohne die wissenschaftlichen Grundlagen näher zu erörtern. Weiter wird das Verfahren der Diasolyse sowie die Messung von Dialysepotentialen und ihre Theorie behandelt. Die Erscheinungen der Thixotropie werden anhand einer Reihe von Abbildungen erläutert. Auch die

neuen Hilfsmittel zur Untersuchung von Kolloiden, wie das Elektronenmikroskop, werden kurz behandelt, und technisch wichtige kolloidchemische Prozesse, wie der Waschvorgang und der Flotationsprozeß, werden — wenn auch nur andeutungsweise — auf Grund der neueren Literatur besprochen.

Im Ganzen ist das gerade für den Anfänger sehr leicht lesbare Buch von Lottermoser durch die in der Neuauflage vorgenommenen Ergänzungen wesentlich bereichert worden und wird unter den Studierenden sehr viel Beifall finden.

Dresden.

K. Schwabe.

Dr. W. Großmann (o. Prof. a. d. T. H. Hannover) Grundzüge der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendung in der Geodäsie. VIII + 261 S. m. 54 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953. Springer-Verlag. Preis geb. 19,80 DM.

Wie der Titel sagt, ist das vorliegende Buch insbesondere für Geodäten geschrieben. Es kann als Hilfe bei Vorlesungen gebraucht werden, eignet sich aber auch als Nachschlagewerk für den Praktiker. Entsprechend dem vorgesehenen Benutzerkreis ist die Darstellung in der heute meist üblichen Form gehalten. Von der Benutzung der Matrizenrechnung wird abgesehen. Daher wird z. B. auch nicht auf die von Banachiewicz angegebene Umformung der Gauß'schen Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme eingegangen, die in der ihr von Zurmühl gegebenen Form zur Vereinfachung der Rechenarbeit wesentlich beiträgt. Nacheinander werden folgende Abschnitte behandelt: Grundzüge der Fehlerlehre, Ausgleich von direkten Beobachtungen, Ausgleich von vermittelnden Beobachtungen, Ausgleich von bedingten Beobachtungen. Ein Anhang, der sich mit der Ausgleichung durch schrittweise Annäherung, dem Glätten von Beobachtungsreihen und dem mittleren Fehler von Genauigkeitsmassen befaßt, dürfte allgemeineres Interesse haben. An zahlreichen Beispielen wird die Anwendung der Fehlerrechnung insbesondere auf Fragen des Vermessungswesens behandelt. Dabei wird Wert auf die praktische Anordnung der Rechnung gelegt. Das Buch, das die Mitte zwischen größeren Darstellungen, wie es z. B. die von Helmert ist, und den vielen heute vorhandenen kleineren hält, kann allen Geodäten warm empfohlen werden.

Dresden.

Willers.

Joseph Pérès (Prof. à la facalté des sciences de Paris), Mécanique générale. IV + 408 S. m. 64 Abb. Paris 1953. Masson et Cie. Preis brosch. 2110 frs., geb. 2545 frs.

Vorliegendes Buch entspricht im wesentlichen den Pariser Vorlesungen des Verfassers und soll vorwiegend dem Gebrauch der Studierenden dienen. Der Inhalt umschließt etwa die sonst als analytische Mechanik an den Universitäten übliche Vorlesung, jedoch mit verschiedenen Erweiterungen. Ebenso wie Lagrange in seiner analytischen Mechanik hat der Verfasser größtenteils auf Abbildungen verzichtet, so daß der Stoff in reichlich abstrakter Form dargeboten wird. Das Buch gliedert sich in folgende Abschnitte: Prinzipien der klassischen Mechanik; Mechanik starrer Körper; Methode der virtuellen Arbeit und Energiesatz; Untersuchungen einer fundamentalen Differentialgleichung der Dynamik; Mechanik des materiellen Punktes; klassische Fragen zur Mechanik des starren Körpers; die Gleichungen von Lagrange und Appell; Variationsprinzipien und kanonische Gleichungen; Bewegungen eines Systems bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten; Stoßmechanik und Ergänzungen zu Systemen mit einsinnig veränderlichen Freiheitsgraden; Mechanik der Continua mit



Anwendung auf biegsame Stäbe. Im großen und ganzen hat der Verfasser besonders auf die klare Klassifizierung der einzelnen, durch die Art der Freiheitsgrade bedingten Bewegungsvorgänge und der zugehörigen Differentialgleichungen und weniger auf die Durchführung der Integration und die Angabe der vollständigen Lösung in speziellen Fällen Wert gelegt.

Dresden.

H. Neuber.

mehr vorliegenden Neuauflage wurden zwar die theoretischen Grundlagen teilweise gekürzt, dafür aber moderne Probleme der Festigkeitslehre berücksichtigt, u. a. Warmfestigkeit, plastische Verformung, Spannungserhöhung bei Abzweigstücken, räumlich-schiefwinklige Systeme usw., so daß der Verfasser den heutigen praktischen Anforderungen weitgehend gerecht wird.

Dresden.

H. Neuber.

**H.v. Jürgensonn**, Elastizität und Festigkeit im Rohrleitungsbau. Statische Berechnung der Rohrleitungen und ihrer Einzelteile. Zweite, neubearbeitete Auflage. VIII + 379 S. m. 236 Abb., 38 Zahlentafeln und 31 Zahlenbeispielen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953. Springer-Verlag. Preis geb. 39,— DM.

Die stürmische Entwicklung des Hochdruck-Rohrleitungsbau hatte den Verfasser zur Herausgabe der ersten Auflage des Buches im Jahre 1940 veranlaßt. Er kam damit dem Wunsche weiter Kreise nach einer Zusammenstellung der Berechnungsgrundlagen für Hochdruck-Rohrleitungen entgegen und brachte neben den notwendigsten theoretischen Grundlagen ausführliche Anleitungen für die in der Praxis besonders bewährten Berechnungsverfahren. Diese Auflage war seit Kriegsende vergriffen. In der nun-

**G. Bangen und Dr. R. Stender**, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. (Schriftenreihe zur Gestaltung des mathematischen Unterrichts Heft 3). 56 S. mit 28 Abb. und 2 Tafeln. Frankfurt am Main/Pinneberg 1954. Otto Salle-Verlag. Preis 4,40 DM.

Die vorliegende Schrift gibt eine für die Hand des Lehrers bestimmte Skizze zur einführenden Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik im Schulunterricht. Im 1. Teil werden methodische Fragen besprochen. Der 2. gibt den eigentlichen Lehrgang. Hier werden zunächst Probleme mit diskreten, sodann mit kontinuierlichen Zufallsveränderlichen, wesentlich in Anlehnung an Gedankengänge von v. Mises, behandelt.

Dresden.

Willers.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

## EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

**Prof. Dr.-Ing. C. Weber**, Schwingungen im Maschinenbau. 151 S. m. 93 Abb. Düsseldorf 1953. Deutscher Ingenieur-Verlag GmbH. Preis kart. 17,— DM (VDI-Mitglieder 15,30 DM.).

**E. Melan** (o. Prof. a. d. T. H. Wien) und **H. Parkus** (Prof. am Michigan State College, East-Lansing, Mich. USA.), Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. 5 + 114 S. m. 30 Abb. Wien 1953. Springer-Verlag. Geb. 18,50 DM.

Premier Colloque sur les équations aux dérivées partielles. (Tenu à Louvain du 17. au 19. décembre 1953). Centre Belge de recherches mathématiques. 128 S. Liège, Paris 1954. Masson & Cie, G. Thone. Preis geh. 200 fr. belges. 1400 francs français.

Jenaer Jahrbuch 1953 (Wissenschaftliche Veröffentlichungen des Zeisswerkes). Herausgegeben vom VEB Carl Zeiss, Jena. 269 S. mit zahlr. Abb. Jena 1953. Kommissionsverlag VEB Gustav Fischer. Preis geb. 18,— DM.

**Dr. W. Haack**, (o. Prof. an der T. U. Berlin), Darstellende Geometrie I. Die wichtigsten Darstellungsmethoden. Grund und Aufbau ebener Körper. (Sammlung Göschen Bd. 142) 110 S. m. 117 Abb. Berlin 1954. Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geh. 2,40 DM.

Higher Transcendental Functions, Volume I. Based, in part, on notes left by **Harry Bateman** (Late Prof. at the California Institute of Technology) and compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Projekt. XXVI + 302 S. New York/Toronto/London 1953. Verlag McGraw-Hill Book Company, Inc. Preis geb. 56/6s.

**Dr. K. Bechert** (o. Prof. an der Univ. Mainz) und **Dr. Ch. Gerthsen** (o. Prof. an der T. H. Karlsruhe). Atomphysik. Bd. III. Theorie des Atombaus, I. Teil von Dr. K. Bechert. 3. umgearb. Aufl. 148 S. m. 16 Abb. Berlin 1954. Bd. IV. Theorie des Atombaus, II. Teil von Dr. K. Bechert. 3. umgearb. Aufl. 180 S. m. 14 Abb. Berlin 1954. (Sammlung Göschen Bd. 1123 bzw. 1165). Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geh. je 4,80 DM.

**Dr.-Ing. W. Matz**, Anwendung des Ähnlichkeitsgrundsatzes in der Verfahrenstechnik. (Verfahrenstechnik in Einzeldarstellungen Bd. 3) VIII + 115 S. m. 29 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg. 1954. Springer-Verlag. Preis geh. 13,50 DM.

**Dr.-Ing. habil. W. Kaufmann** (o. Prof. an der T. H. München). Technische Hydro- und Aeromechanik. VIII + 352 S. m. 254 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1954. Springer-Verlag. Preis geb. 36,— DM.



Am Abend des 4. Oktober 1954 entschlief in Landshut (Bayern)  
im 77. Lebensjahr der em. Professor der Technischen Universität  
Berlin-Charlottenburg

Dr. Dr. E. h.

## Georg Hamel

Mit ihm ist der letzte der Mathematiker dahin geschieden, die der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik seit ihrer Gründung nahe standen. Bis zu seinem Tode war er Mitglied des Wissenschaftlichen Beirates der Zeitschrift. Hamel war ein außerordentlich vielseitig interessierter Mathematiker, der zahlreiche Arbeiten aus den Gebieten der Mathematik wie der Mechanik geschrieben hat. Eine Reihe dieser wertvollen Aufsätze sind in unserer Zeitschrift veröffentlicht. Schriftleitung wie Verlag werden seiner Mitarbeit stets dankbar gedenken.

Willers

